



第2章 空间向量 与立体几何

2.1 空间直角坐标系

2.1.1 建立空间直角坐标系+

2.1.2 空间两点间的距离

题型诀

1-1. C 【解析】若 $m=0$, 则点 $M(0, 2, 0)$ 在 y 轴上; 若 $m \neq 0$, 点 M 的横坐标为 0, 纵坐标大于 0, 竖坐标不为 0, 点 M 在 yOz 平面内. 综上所述, 点 M 一定在 yOz 平面内.

1-2. $(\frac{3}{2}, 2, 5)$ 【解析】由题意可知 $A'(3, 0, 5), C'(0, 4, 5)$, P 为线段 $A'C'$ 的中点. 由中点坐标公式得点 P 的坐标为 $(\frac{3+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{5+5}{2})$, 即 $P(\frac{3}{2}, 2, 5)$.

2-1. C 【解析】因为在空间中, 点关于 x 轴对称时, x 轴上坐标不变, y, z 轴上坐标取相反数, 故点 P 关于 x 轴的对称点的坐标是 $(1, -3, -5)$.

2-2. $(5, 2, -7)$ 【解析】设 $M(x, y, z)$. 因为线段 MP 的中点是 Q , 所以

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2}=1, \\ \frac{y+2}{2}=2, \\ \frac{z+1}{2}=-3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=5, \\ y=2, \\ z=-7, \end{cases}$$

所以 $M(5, 2, -7)$.

2-3. $(-4, 0, 0)$ 【解析】点 $A(-4, 2, 3)$ 关于坐标原点的对称点 A_1 的坐标为 $(4, -2, -3)$, 点 $A_1(4, -2, -3)$ 关于 zOx 平面的对称点 A_2 的坐标为 $(4, 2, -3)$, 点 $A_2(4, 2, -3)$ 关于 z 轴的对称点 A_3 的坐标为 $(-4, -2, -3)$, \therefore 线段 AA_3 的中点 M 的坐标为 $(-4, 0, 0)$.



3-1. B 【解析】线段 BC 的中点坐标为

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-3+5}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = (2, 1, -2), \text{ 则}$$

$\triangle OBC$ 的边 BC 上的中线长为

$$\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3.$$

3-2. C 【解析】由对称性可知 $M(0, 2,$

$1)$ 关于 xOy 平面的对称点为 $M'(0, 2,$

$-1)$, 则光线所经过的路程为 $|M'N| =$

$$\sqrt{(0-2)^2+(2-0)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{17}, \text{ 故选 C.}$$

3-3. 【解】设 $P(0, 0, z)$. 由 $|PA| = |PB|$ 得

$$\sqrt{3^2+1^2+(z-1)^2} = \sqrt{2^2+2^2+(z-3)^2},$$

$$\therefore z = \frac{3}{2}, \therefore P\left(0, 0, \frac{3}{2}\right), |PA| =$$

$$\sqrt{(0+3)^2+(0+1)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

4-1. C 【解析】由空间两点间的距离公式

$$\text{得 } |AB| = \sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2+(3-11)^2} = \sqrt{89},$$

$$|AC| = \sqrt{(6-1)^2+(-1+2)^2+(4-11)^2} = 5\sqrt{3},$$

$$|BC| = \sqrt{(6-4)^2+(-1-2)^2+(4-3)^2} = \sqrt{14},$$

$$\therefore |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2, \text{ 且 } |AB|, |AC|,$$

$|BC|$ 互不相等,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

4-2. C 【解析】因为 $|MN| =$

$$\sqrt{(t+1)^2+(2t-1)^2+0^2} = \sqrt{5t^2-2t+2} =$$

$$\sqrt{5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}},$$

所以当 $t = \frac{1}{5}$ 时, $|MN|$ 有最小值 $\sqrt{\frac{9}{5}} =$

$$\frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{ 故选 C.}$$

巩固练

1. B 【解析】由题意可知, 点 $P(a, b, c)$

到 yOz 平面的距离是 $|a|$, 故选 B.

2. C 【解析】因为 A, B 两点在 x, y 轴上

的坐标互为相反数, 它们在 z 轴上的

坐标相同, 所以点 A, B 关于 z 轴对称.

3. D 【解析】设 $D(x, y, z)$, 因为 AC 与



BD 的中点相同, 所以 $\frac{1+0}{2} = \frac{1+x}{2}, \frac{0+1}{2} =$

$\frac{1+y}{2}, \frac{0+2}{2} = \frac{0+z}{2}$, 解得 $x=0, y=0, z=2$,

所以 $D(0,0,2)$. 故选 D.

4. **(0,0,-3)** 【解析】设点 M 的坐标为

$(0,0,m)$, 因为 $|MA| = |MB|$, 所以

$$\sqrt{1^2+0+(2-m)^2} = \sqrt{(-1)^2+3^2+(m-1)^2},$$

解得 $m=-3$. 故点 M 的坐标为 $(0,0,-3)$.

5. **4** 【解析】因为点 $A(1,-2,3)$ 关于平

面 xOz 的对称点为 $B(1,2,3)$, 所以

$$AB = |-2-2| = 4.$$

6. **A** 【解析】由题意可得 $|AB| =$

$$\sqrt{(-6)^2+2^2+3^2} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{8^2+(-5)^2+3^2} = 7\sqrt{2},$$

$$\therefore |AB| = |AC|,$$

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选 A.

7. **D** 【解析】如图, 取 AB 边的中点 D ,

连接 PD , 故 $PD = \sqrt{PA^2 - AD^2} = \sqrt{3}$.

又 $A(m,0,0), B(0,n,0)$, 则点 A, B 分

别在 x, y 轴上运动. 因为 $AB=2, OA \perp$

$OB, |OD|=1$, 故点 O 在以 D 为球心,

AB 为直径的球面上运动, 所以 $|PD| -$

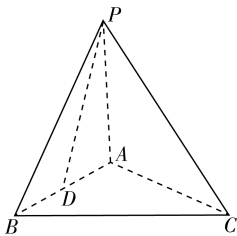
$$1 \leq |OP| \leq |PD| + 1, \text{ 即 } \sqrt{3} - 1 \leq$$

$$|OP| \leq \sqrt{3} + 1. \text{ 因为 } 1 \in [\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} +$$

$$1], \frac{3}{2} \in [\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1], 2 \in [\sqrt{3} - 1,$$

$$\sqrt{3} + 1], 3 \notin [\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1], \text{ 故 } |OP| \text{ 的}$$

值不可能是 3, 故选 D.



8. **$\frac{\sqrt{6}}{2}$** 【解析】设该点的坐标为 (x,y,z) .



因为该点到三个坐标轴的距离都是 1, 所以 $x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 1, x^2 + z^2 = 1$, 所以 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$, 故该点到原点的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

9. $\sqrt{6}$ 【解析】 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$ 表示空间中的点与点 $(0, 0, 0), (-1, 2, 1)$ 的距离之和, 所以最小值即为点 $(0, 0, 0)$ 与点 $(-1, 2, 1)$ 之间的距离, 此时点 (x, y, z) 在点 $(0, 0, 0)$ 与点 $(-1, 2, 1)$ 连线的线段上, 故最小值为 $\sqrt{(-1-0)^2 + (2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{6}$.

10. 1 或 3 【解析】由空间两点间的距离公式可得 $|MN| = \sqrt{1 + (a-1)^2 + 1} = \sqrt{(a-1)^2 + 2}, |MO| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}, |NO| = \sqrt{0 + a^2 + 0} = \sqrt{a^2}$.

分类讨论:

若 $|MN|^2 = |MO|^2 + |NO|^2$, 则 $(a-1)^2 + 2 = 3 + a^2$, 解得 $a = 0$, 此时 N, O 两点重合, 不符合题意, 舍去;

若 $|MO|^2 = |MN|^2 + |NO|^2$, 则 $3 = (a-1)^2 + 2 + a^2$, 解得 $a = 1$ 或 $a = 0$ (舍去);

若 $|NO|^2 = |MN|^2 + |MO|^2$, 则 $a^2 = (a-1)^2 + 2 + 3$, 解得 $a = 3$.

综上所述, $a = 1$ 或 $a = 3$.

11. 【解】(1) 根据题中建立的空间直角坐标系, 易知点 D, N, M 的坐标分别为 $D(0, 0, 0), N(2, 1, 0), M(1, 2, 3)$.

(2) 由空间两点间的距离公式, 可得

$$|MD| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{14},$$

$$|MN| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{11}.$$

(3) 依题意可设点 P 的坐标为 $(2y,$



$y, 0)$, 其中 $y \in [0, 1]$.

$$\text{则 } |MP| = \sqrt{(2y-1)^2 + (y-2)^2 + (0-3)^2} =$$

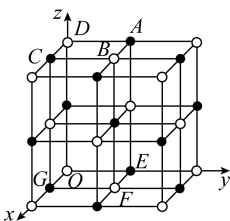
$$\sqrt{5y^2 - 8y + 14} = \sqrt{5\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{54}{5}}.$$

$\because 0 < \frac{4}{5} < 1, \therefore$ 当 $y = \frac{4}{5}$ 时, $|MP|$ 取得

最小值, 为 $\sqrt{\frac{54}{5}}$, 即 $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

故 $|MP|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

- 12. A** 【解析】设图中最上层中间的钠离子所在位置为 B 点, 以 O, B 为相对顶点, 作出长方体 $DABC-OEFG$, 如图所示.



\because 平面 $BFGC$ 经过点 B , 且与 x 轴垂直,

\therefore 点 B 在 x 轴上的投影为点 G , 结合

$G\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ 得点 B 的横坐标为 $\frac{1}{2}$;

同理可得, 点 B 在 y 轴上的投影为点

E , 结合 $E\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ 得 B 的纵坐标

为 $\frac{1}{2}$;

点 B 在 z 轴上的投影为点 D , 结合

$D(0, 0, 1)$ 得点 B 的竖坐标为 1 ,

\therefore 点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

故选 A.

2.2 空间向量及其运算

课时 1 空间向量及其运算

题型诀

- 1-1. A** 【解析】对于 A, 零向量的相反向量是它本身, A 是假命题;



对于 B, 空间向量是有向线段, 不能比较大小, B 是真命题;

对于 C, 如果 $|\mathbf{a}| = 0$, 则 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, C 是真命题;

对于 D, 两个相等的向量, 若起点相同, 则终点也相同, D 是真命题. 故选 A.

1-2. ABC 【解析】选项 A 中, 向量的模可以比较大小, 但向量不能比较大小; 选项 B 中, 应为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$; 选项 C 中, 单位向量的模都是 1; 选项 D 中, 由向量的运算可知正确. 故选 ABC.

2-1. C 【解析】由题意知, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{OM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} + \frac{3}{4}(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CN} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OC}$.

又 $\overrightarrow{OG} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 所以 $x = \frac{1}{8}, y = \frac{3}{8}, z = \frac{3}{8}$, 即 $x + y + z = \frac{7}{8}$. 故选 C.

2-2. 【解】(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AA_1}$.

(2) $\because \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$,

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1C}$.

(3) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = 2\overrightarrow{BM}$, 则 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$,

$\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = \mathbf{0}$.

3-1. C 【解析】因为 c 与 d 共线, 所以存在实数 k , 使得 $d = kc$, 即 $\mathbf{a} + (2x-1)\mathbf{b} = kx\mathbf{a} + k\mathbf{b}$, 又向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线, 则

$$\begin{cases} kx = 1, \\ k = 2x - 1, \end{cases}$$
 整理可得 $x(2x-1) = 1$, 即

$2x^2 - x - 1 = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = 1$. 故选 C.



3-2. C 【解析】由 $\overrightarrow{AB} = e_1 + e_2 + e_3, \overrightarrow{BC} = e_1 + \lambda e_2 + e_3,$

得 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2e_1 + (1 + \lambda)e_2 + 2e_3,$

因为 A, C, D 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{CD},$

则存在唯一实数 $\mu,$ 使得 $\overrightarrow{AC} = \mu \overrightarrow{CD},$

$$\text{则} \begin{cases} 2 = 4\mu, \\ 1 + \lambda = 8\mu, \\ 2 = 4\mu, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} \mu = \frac{1}{2}, \\ \lambda = 3, \end{cases} \text{故选 C.}$$

巩固练

1. A 【解析】 $\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}.$ 故选 A.

2. B 【解析】根据平面向量的运算法则可知, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC},$ 所以 A 正确;

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{BA'},$ 所以 B 错误;

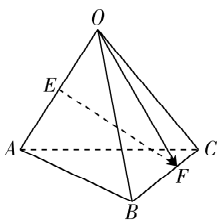
根据空间向量的运算法则可知, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'},$ 所以 C 正确;

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AE},$ 所以 D 正确. 故选 B.

3. D 【解析】如图所示, 由题知 E 为 OA

的中点, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB},$ 且 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b},$

$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c},$



则 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} =$

$\mathbf{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \mathbf{b} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) -$

$\frac{1}{2}\mathbf{a} = \mathbf{b} + \frac{2}{3}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) - \frac{1}{2}\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} +$

$\frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}.$ 故选 D.

4. C 【解析】 $\because \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} =$

$\overrightarrow{DF}, \therefore \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} =$



\overrightarrow{AF} . 故选 C.

5. 1 【解析】由题意, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M, N 分别是 A_1B 和 B_1C_1 上的点,

且 $BM=3A_1M, C_1N=2B_1N$,

$$\text{则 } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1N}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1B_1}$$

$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} (x, y, z \in \mathbf{R}),$$

$$\text{所以 } x+y+z = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = 1.$$

6. AB 【解析】选项 A 中, a 与 b 的方向不能确定;

选项 B 中, 两个向量无法比较大小;

选项 C 中, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, 即 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$;

选项 D 中, 因为 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, 所以 $A, B,$

C 三点共线. 故选 AB.

7. BD 【解析】①中, 原式 $= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, 不符合题意;

②中, 原式 $= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \mathbf{0}$, 符合题意;

③中, 原式 $= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$, 不符合题意;

④中, 原式 $= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \mathbf{0}$, 符合题意.

故选 BD.

课时 2 空间向量的数量积

题型诀

1-1. AC 【解析】在空间四边形 $ABCD$ 中, \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 夹角为 60° , 所以 $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a^2$, 故 A 正确;



\overrightarrow{AD} 与 \overrightarrow{DB} 夹角为 120° , 所以 $2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = 2 \times |\overrightarrow{AD}| \times |\overrightarrow{DB}| \cos 120^\circ = -a^2$, 故 B 错误;

因为 F, G 分别是 AD, DC 的中点, 所以 $FG \parallel AC$ 且 $|FG| = \frac{1}{2}|AC|$, 所以 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{FG}$

夹角为 0° , 所以 $2\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times |\overrightarrow{FG}| \times |\overrightarrow{AC}| \cos 0^\circ = a^2$, 故 C 正确;

因为 E, F 分别是 AB, AD 的中点, 所以 $EF \parallel BD$ 且 $|EF| = \frac{1}{2}|BD|$, 所以 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CB}$ 夹角为

120° , 所以 $2\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \times |\overrightarrow{EF}| \times |\overrightarrow{CB}| \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$, 故 D 错误. 故

选 AC.

1-2. D 【解析】因为 $b \cdot (a+b) = 0$, 所以

$a \cdot b + b^2 = 0$, 即 $a \cdot b = -b^2$, 所以 $a-b$ 在 b

上的投影向量为 $|\overrightarrow{a-b}| \cos \langle \overrightarrow{a-b}, \overrightarrow{b} \rangle \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} =$

$\left(|\overrightarrow{a-b}| \times \frac{(\overrightarrow{a-b}) \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a-b}| |\overrightarrow{b}|} \right) \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{a \cdot b - b^2}{|\overrightarrow{b}|^2} \overrightarrow{b} =$

$\frac{-2b^2}{|\overrightarrow{b}|^2} \overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{b}$. 故选 D.

1-3. (1) $\overrightarrow{AB_1}$ (2) $2\sqrt{5}$ (3) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

【解析】易知 $AB_1 = 2\sqrt{5}$, $AC_1 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$.

(1) 由长方体的性质可知 $C_1B_1 \perp AB_1$, 因此向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 在向量 $\overrightarrow{AB_1}$ 方向上的投影向量为 $\overrightarrow{AB_1}$.

(2) 在 $\text{Rt} \triangle AB_1C_1$ 中, $\cos \angle B_1AC_1 = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} =$

$\frac{\sqrt{30}}{6}$, 即 $\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_1} \rangle = \frac{\sqrt{30}}{6}$, 所以向

量 $\overrightarrow{AC_1}$ 在向量 $\overrightarrow{AB_1}$ 方向上的投影为

$|\overrightarrow{AC_1}| \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_1} \rangle = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{30}}{6} = 2\sqrt{5}$.

(3) 向量 $\overrightarrow{AB_1}$ 在向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 方向上的投影

为 $|\overrightarrow{AB_1}| \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_1} \rangle = 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{30}}{6} =$

$\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

2-1. D 【解析】 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} -$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB}) &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cdot \\ \cos \angle AOC &- |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB = \\ \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| &- \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|, \text{ 因为 } OB = \\ OC, \text{ 所以 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0, \text{ 所以 } \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}, \\ \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC} \rangle &= 0, \text{ 故选 D.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2-2. 【解】 } \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \\ \overrightarrow{BA}) &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= 0 - a^2 + 0 - 0 = -a^2. \end{aligned}$$

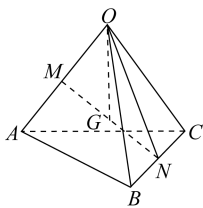
因为 $\square ABB_1A_1, \square BB_1C_1C$ 的对角线都分别相互垂直且相等, 所以四边形 ABB_1A_1 、四边形 BB_1C_1C 都是正方形.

$$\text{所以 } |\overrightarrow{BA_1}| = \sqrt{2}a, \text{ 且 } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}a,$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{AC} \rangle &= \frac{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BA_1}| |\overrightarrow{AC}|} = \\ \frac{-a^2}{\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{BA_1}$ 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为 120° .

3-1. 【证明】如图, 连接 ON , 设 $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = \theta, \overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 则 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.



$$\begin{aligned} \text{又 } \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right] &= \frac{1}{4} (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}), \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \mathbf{c} - \mathbf{b}, \\ \therefore \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{4} (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{4} (|\mathbf{a}|^2 \cos \theta - |\mathbf{a}|^2 \cos \theta - |\mathbf{a}|^2 + \\ |\mathbf{a}|^2) &= 0. \end{aligned}$$

$\therefore \overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{BC}$, 即 $OG \perp BC$.

3-2. 【证明】连接 AE (图略). 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$,



$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{c}.$$

由题知 $a^2 = b^2 = c^2 = 1, a \cdot b = b \cdot c = c \cdot$

$$a = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \\ &= \frac{1}{3}(a \cdot b - a^2 + b^2 - b \cdot a + c \cdot b - c \cdot a) = 0, \end{aligned}$$

故 $AO \perp BC$.

同理可得 $AO \perp BD$.

又因为 $BC \subset \text{平面 } BCD, BD \subset \text{平面 } BCD$,
且 $BC \cap BD = B$, 所以 $AO \perp \text{平面 } BCD$.

4-1. $\sqrt{97}$ 【解析】由平行六面体的特征可知 $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$, 所以 $|\overrightarrow{AC'}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA'}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = 9 + 16 + 25 + 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} + 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} + 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 50 + 12 + 15 + 20 = 97$, 所以 $AC' = \sqrt{97}$.

4-2. $\frac{14}{3}$ 【解析】 $\because \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}[(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})] = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$,
 $\therefore \overrightarrow{OG} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2 = \frac{1}{3} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 3^2 + \frac{1}{3} \times 1^2 = \frac{14}{3}$.

4-3. (1) 【证明】 $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$,
 $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$.



$\because BB_1 \perp \text{平面 } ABC, AB \subset \text{平面 } ABC, BC \subset \text{平面 } ABC, \therefore BB_1 \perp AB, BB_1 \perp BC,$

$$\therefore \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

又 $\triangle ABC$ 为正三角形, $\therefore \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = \pi -$

$$\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}) \cdot (\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BB_1}|^2 + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle + |\overrightarrow{BB_1}|^2 \\ &= -1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{BC_1}, \therefore AB_1 \perp BC_1.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{【解】} &\text{由(1)知 } \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cdot \\ &\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle + |\overrightarrow{BB_1}|^2 = |\overrightarrow{BB_1}|^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |\overrightarrow{BC_1}| &= |\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BB_1}|^2} = \\ &\sqrt{2 + |\overrightarrow{BB_1}|^2}, \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{BC_1}|} =$$

$$\frac{|\overrightarrow{BB_1}|^2 - 1}{2 + |\overrightarrow{BB_1}|^2} = \frac{1}{2}, \therefore |\overrightarrow{BB_1}| = 2, \text{即侧棱长为 } 2.$$

巩固练

1. **D** 【解析】对于①, 当 a, b 反向共线时, $|a| - |b| \neq |a - b|$, 不满足必要性, 故①为假命题;

对于②, $(a \cdot b)^2 = (|a| |b| \cos \theta)^2 = |a|^2 |b|^2 \cos^2 \theta \neq a^2 \cdot b^2$, 故②为假命题;

对于③, 当 $|a| = |b|$, a, b 与 c 的夹角相等, 但是分别位于 c 的两侧时, $a \cdot c = b \cdot c$, 但 $a \neq b$, 故③为假命题;

对于④, 因为 $a \cdot b$ 和 $b \cdot c$ 都是常数, 所以 $(a \cdot b) \cdot c$ 和 $a \cdot (b \cdot c)$ 表示两个向量, 若 a 和 c 方向不同, 则 $(a \cdot b) \cdot c$ 和 $a \cdot (b \cdot c)$ 不相等, 故④为假命题. 故选 D.

2. **B** 【解析】依题意有 $|a + b|^2 = (a +$



$b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 2 + 2\cos \theta > 1$, 即

$\cos \theta > -\frac{1}{2}$, 又 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta \in$

$\left[0, \frac{2\pi}{3}\right)$. 故选 B.

3. C 【解析】依题意有 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot$

$\cos \frac{2\pi}{3} = 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$, 所以 $(2a -$

$b) \cdot a = 2|a|^2 - a \cdot b = 8 - (-4) = 12$, 所

以 $2a - b$ 在 a 上的投影向量为

$\frac{(2a - b) \cdot a}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|} = \frac{12}{2} \times \frac{a}{2} = 3a$. 故

选 C.

4. C 【解析】因为 $\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC}$, $\angle BAD =$

90° , 所以 $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, 所以 $\vec{AB} \cdot$

$\vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} -$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2$, 所以 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2$. 又

$AB = AC = 2$, 所以 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot$

$|\vec{AC}| \cos \angle BAC = 2$, 所以 $\cos \angle BAC =$

$\frac{1}{2}$, 又 $\angle BAC \in (0^\circ, 180^\circ)$, 所以 $\angle BAC =$

60° . 故选 C.

5. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $|\vec{AB} + \vec{AC}| =$

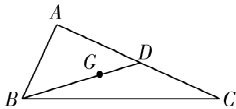
$|\vec{AB} - \vec{AC}|$, 得 $\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2 =$

$\vec{AB}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, 即

$AB \perp AC$.

又由点 G 满足 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \mathbf{0}$, 可知点

G 为 $\triangle ABC$ 的重心.



如图, 设 AC 的中点为 D , 则 $\vec{BG} =$

$\frac{2}{3}\vec{BD}$, $\vec{BD} \cdot \vec{BA} = (\vec{AD} - \vec{AB}) \cdot \vec{BA} =$

$\frac{1}{2}\vec{AC} \cdot \vec{BA} + \vec{AB}^2 = \vec{AB}^2$,

所以向量 \vec{BG} 在向量 \vec{BA} 上的投影向

量为 $\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BG}}{|\vec{BA}|} \cdot \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \frac{\vec{BA} \cdot \frac{2}{3}\vec{BD}}{|\vec{BA}|^2} \cdot$

$\vec{BA} = \frac{2\vec{AB}^2}{3|\vec{BA}|^2} \cdot \vec{BA} = \frac{2}{3}\vec{BA}$. 故选 B.



6. **B** 【解析】因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 所以 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 > 0$,

$$\text{所以 } \cos \angle DBC = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{BD}|} > 0,$$

故 $\angle DBC$ 是锐角.

同理 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} > 0, \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} > 0$, 可得 $\angle BCD, \angle BDC$ 都是锐角,

故 $\triangle BCD$ 是锐角三角形. 故选 B.

7. 【证明】设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{A_1C} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \overrightarrow{BB_1} = \mathbf{c},$$

因为 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$,
 $AB = AD = AA_1 = 1$,

$$\text{所以 } \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BD} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

$$\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BB_1} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^2 = 0, \text{ 即 } \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{BB_1},$$

所以 $A_1C \perp BD, A_1C \perp BB_1$.

又 $BD \subset \text{平面 } BDD_1B_1, BB_1 \subset \text{平面 } BDD_1B_1, A_1C \not\subset \text{平面 } BDD_1B_1$, 且 $BD \cap BB_1 = B$, 所以 $A_1C \perp \text{平面 } BDD_1B_1$.

8. **BD** 【解析】由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, 则 $|\mathbf{a}| = 0$ 或 $|\mathbf{b}| = 0$ 或 $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ 都为 0 或 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, 即 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 或 \mathbf{a}, \mathbf{b} 都为 $\mathbf{0}$ 或 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 故 A 正确;

$|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| < |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, 向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 可能共线, 比如共线向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的模分别是 2, 3, 故 B 错误;

在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, 故 C 正确;



在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot$

$$\overrightarrow{BC} = 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \text{故 D 错误.}$$

9. AB 【解析】依题意有 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \times 6 \times \cos 60^\circ = 18,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AC_1}^2 = (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AB}^2 +$$

$$\overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot$$

$$\overrightarrow{AD} = 36 + 36 + 36 + 3 \times 2 \times 18 = 216, \text{所以}$$

$$|\overrightarrow{AC_1}| = 6\sqrt{6}, \text{故 A 正确;}$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2 -$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2 = 0, \text{所以 } AC_1 \perp$$

DB , 故 B 正确;

由题易知 $\triangle AA_1D$ 为等边三角形,

$\angle AA_1D = 60^\circ$, 又 $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{A_1D}$, 且向量

$\overrightarrow{A_1D}$ 与 $\overrightarrow{AA_1}$ 的夹角是 120° , 所以 $\overrightarrow{B_1C}$

与 $\overrightarrow{AA_1}$ 的夹角是 120° , 故 C 不正确;

$$\text{因为 } \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB})^2} = 6\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2} = 6\sqrt{3},$$

$$\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB} +$$

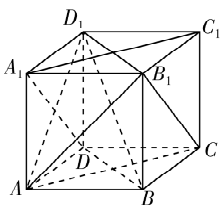
$$\overrightarrow{AD}) = 36, \text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AC} \rangle =$$

$$\frac{\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{36}{6\sqrt{2} \times 6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{故 D}$$

不正确. 故选 AB.

10. ACD 【解析】如图, 设正方体

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a .



对于 A, 连接 AB_1, AC, B_1C , 因为

$\triangle AB_1C$ 为等边三角形, 故 $|\overrightarrow{AB_1} \times$

$$\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}a \times \sqrt{2}a \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}a^2,$$



连接 BD, AD_1, B_1D_1 , 因为 $BD \parallel B_1D_1$

且 $BD = B_1D_1$, $\triangle AB_1D_1$ 为等边三角

形, 所以 $|\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{D_1B_1}| =$

$\sqrt{2}a \times \sqrt{2}a \times \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}a^2$, 故 A 正确;

对于 B, 根据定义, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD} \times$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AA_1}$, 故 B 错误;

对于 C, $6|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}| = 6 \times a \times \sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$6a^2 = S$, 故 C 正确;

对于 D, 连接 A_1C_1, BD_1, A_1D , 因为

$D_1D \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1, A_1C_1 \subset$ 平面

$A_1B_1C_1D_1$, 所以 $D_1D \perp A_1C_1$, 又

$A_1C_1 \perp B_1D_1, B_1D_1 \cap DD_1 = D_1$,

$B_1D_1 \subset$ 平面 $BB_1D_1D, DD_1 \subset$ 平面

$BB_1D_1D, A_1C_1 \not\subset$ 平面 BB_1D_1D , 所以

$A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D , 又 $BD_1 \subset$ 平面

BB_1D_1D , 所以 $A_1C_1 \perp BD_1$, 同理可得

$A_1D \perp$ 平面 ABD_1 , 所以 $BD_1 \perp A_1D$, 结

合定义可知 $\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{A_1D}$ 与 $\overrightarrow{BD_1}$ 共线,

故 D 正确. 故选 ACD.

2.3 空间向量基本定理及坐标表示

2.3.1 空间向量的分解与坐标表示

易错记

1-1. 【解】 因为 $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$, 又 A, B, D 三点共线, 所以

$$\frac{2}{1} = \frac{k}{-4}, \text{解得 } k = -8.$$

题型诀

1-1. A 【解析】 因为 A, B, C 三点不共线, 则 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ 不共线,

若 P, A, B, C 四点共面, 则存在唯一的一组实数 x, y , 使得 $\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$,

即 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = x(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$, 变形得 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + (1-x-y)\overrightarrow{OC}$.

对于 A, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 整理



得 $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 则 $3 - 1 - 1 = 1$, 所以

点 P 在平面 ABC 内, 故选项 A 正确;

对于 B, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 可得

$\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + 0 \cdot \overrightarrow{OB}$, 则 $-1 - 1 + 0 \neq 1$, 故

点 P 不在平面 ABC 内, 故选项 B 错误;

对于 C, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$,

可得 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$,

则 $2 + 3 - 3 \neq 1$, 故点 P 不在平面 ABC 内,

故选项 C 错误;

对于 D, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OC}$,

可得 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$

则 $\frac{1}{2}(1 + 1 - 1) \neq 1$, 故点 P 不在平面 ABC

内, 故选项 D 错误. 故选 A.

1-2. 【证明】 由题可得 $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = 2\overrightarrow{NP}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1C_1}) \text{ ①.}$$

\because 点 A, B, C 及点 A_1, B_1, C_1 分别共线,

$\therefore \overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{BA} = 2\lambda \overrightarrow{NM}$ (λ 为实数), $\overrightarrow{B_1C_1} =$

$\mu \overrightarrow{A_1B_1} = 2\mu \overrightarrow{NP}$ (μ 为实数). 代入①式,

得 $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(2\lambda \overrightarrow{NM} + 2\mu \overrightarrow{NP}) = \lambda \overrightarrow{NM} + \mu \overrightarrow{NP}$.

$\because NM \parallel AB, NP \parallel A_1B_1, \therefore \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}$ 不共

线, $\therefore \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}$ 共面.

$\therefore M, N, P, Q$ 四点共面.

2-1. 【解】 $\because \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} +$

$k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC_1} =$

$k(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC}), \therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} -$

$k\overrightarrow{AA_1}, \therefore$ 由共面向量定理知, 向量 \overrightarrow{MN} 与

向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}$ 共面.

3-1. AC 【解析】 选项 A 中, 若 $\overrightarrow{OM} =$

$x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ ($x + y + z = 1$), 则 M, A, B, C



四点共面, 即 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 所以选项 A 中, $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 不共面, 可以构成基;

选项 C 中, $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 不共面, 可以构成基;

选项 D 中, 因为 $6\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$, 所以 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, 可得 M, A, B, C 四点共面, 即 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 无法构成基;

选项 B 中, 根据平面向量基本定理, 由 $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, 得 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 无法构成基. 故选 AC.

3-2. D 【解析】 对于选项 A, 假设存在一组实数对 λ, μ 满足 $a = \lambda(b+c) + \mu(a+b)$, 可知 λ, μ 无解, 即向量 $a, b+c, a+b$ 不共面;

对于选项 B, 假设存在一组实数对 λ, μ 满足 $a = \lambda(a+c) + \mu(a+b)$, 可知 λ, μ 无解, 即向量 $a, a+c, a+b$ 不共面;

对于选项 C, 假设存在一组实数对 λ, μ 满足 $a+b+c = \lambda c + \mu b$, 可知 λ, μ 无解, 即向量 $a+b+c, c, b$ 不共面;

对于选项 D, 存在一组实数对 $\lambda = -\frac{1}{2}$,

$$\mu = \frac{1}{2}, \text{ 满足 } b = -\frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b),$$

即 $b, a-b, a+b$ 是共面向量. 故选 D.

4-1. B 【解析】 $\because P$ 为棱 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \overrightarrow{OC} = c,$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c, \text{ 故选 B.}$$

4-2. B 【解析】 $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} -$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} -$$

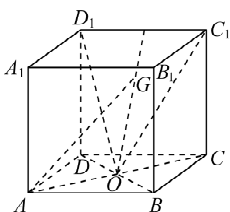
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} =$$



$$\begin{aligned} \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AP} - \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AP} &= \vec{AB} + \\ \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD}) - \frac{1}{6}\vec{AP} &= \frac{2}{3}\vec{AB} + \\ \frac{1}{6}\vec{AD} - \frac{1}{6}\vec{AP}, \text{ 所以 } x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{6}, z = \\ -\frac{1}{6}, \text{ 所以 } x+y+z &= \frac{2}{3}. \text{ 故选 B.} \end{aligned}$$

4-3. $-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{5}{6}\mathbf{c}$ 【解析】 $\vec{AG} =$

$$\begin{aligned} \vec{AO} + \vec{OG} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \frac{1}{3}(\vec{OD_1} + \vec{OC_1}) = \\ \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}) + \vec{DD_1} + \right. \\ \left. \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{CC_1} \right] &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \frac{1}{6}(-\mathbf{b} + \\ \mathbf{c}) - \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{6}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{3}\mathbf{a} &= -\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \\ \frac{5}{6}\mathbf{c}. \end{aligned}$$



5-1. D 【解析】 \because 向量 \mathbf{p} 在基 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$

下的坐标为 $(2, 3, -1)$, $\therefore \mathbf{p} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

设向量 \mathbf{p} 在基 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}\}$ 下的坐标是

(x, y, z) , 则 $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c} = x\mathbf{a} + y(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + z(\mathbf{b} - \mathbf{c})$,

$$\therefore \begin{cases} x=2, \\ y+z=3, \\ y-z=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=2, \end{cases} \text{ 即 } (2, 1, 2). \text{ 故}$$

选 D.

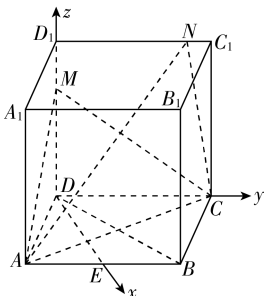
5-2. 【解】由题意可知, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 又 $\angle BAD = 60^\circ$, 如图, 连接 BD , 所以 $\triangle ABD$ 是正三角形, 取 AB 的中点 E , 连接 DE , 所以 $DE \perp AB, DE \perp DC$.

又因为四棱柱的侧棱与底面垂直, 所以 DE, DC, DD_1 两两垂直.

若以 D 为坐标原点, 分别以 $\vec{DC}, \vec{DD_1}$ 的方向为 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角



坐标系, 则 \overrightarrow{DE} 的方向为 x 轴的正方向.



(1) 因为 $AE \parallel DC$, 且 $AE = \frac{1}{2}DC = 3$,

所以 $DE = 3\sqrt{3}$,

所以 $B_1(3\sqrt{3}, 3, 6)$, $M(0, 0, 4)$.

(2) 由(1)得 $A(3\sqrt{3}, -3, 0)$, $C(0, 6, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AM} = (-3\sqrt{3}, 3, 4)$.

设点 $N(0, \lambda, 6)$ ($0 \leq \lambda \leq 6$), 则

$\overrightarrow{CN} = (0, \lambda - 6, 6)$.

巩固练

1. **C** 【解析】①真命题, 作为基的向量必须不共面; ②真命题; ③假命题, a, b 不共线, 当 $c = \lambda a + \mu b$ 时, a, b, c 共面. 故只有①②为真命题.

2. **B** 【解析】若 A, B, C 三点共线, 则存在非零实数 λ , 使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, $\lambda \neq 1$,
 $\therefore \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = \lambda (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA})$, 即 $(\lambda - 1)\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} + \lambda \overrightarrow{PC}$, 即 $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{\lambda - 1}\overrightarrow{PB} + \frac{\lambda}{\lambda - 1}\overrightarrow{PC}$,

$\therefore \overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PC}$, 其中 $m + n = 1$;

若 P, A, B, C 四点共面, 且 A, B, C 三点不共线, 则存在实数 m, n , 使得 $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PC}$, 其中 $m + n \neq 1$, $\therefore \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})$, 即 $(m + n - 1)\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$,

$\therefore \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{m + n - 1}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m + n - 1}\overrightarrow{OB} + \frac{n}{m + n - 1}\overrightarrow{OC}$, 即 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 其中 $x + y + z = 1$.

$\because x = 4, y = -5, z = 2 \Rightarrow x + y + z = 1$, 但 $x +$



$$y+z=1 \nRightarrow x=4, y=-5, z=2,$$

\therefore “ $x=4, y=-5, z=2$ ” 是 “ P, A, B, C 四点共面” 的充分且不必要条件. 故选 B.

3. **(-2, 2, -1)** 【解析】由题设, 以 A 为原点, AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, $A(0, 0, 0)$, 由 $\overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 1)$, 知点 $C_1(2, 2, 1)$, 知 $AB=AD=2, AA_1=1$, 则 $B_1(2, 0, 1), D(0, 2, 0)$, $\therefore \overrightarrow{B_1D} = (-2, 2, -1)$.

4. **A** 【解析】 $\overrightarrow{PA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PB} - x\overrightarrow{PC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PB} - x\overrightarrow{PC} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{PB} - x\overrightarrow{PC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{PD}$, 又 $\because P$ 是空间中任意一点, A, B, C, D 四点满足任意三点均不共线, 但四点共面, $\therefore \frac{3}{2} - x - \frac{1}{6} = 1$, 解得 $x = \frac{1}{3}$, 故选 A.

5. **3** 【解析】由已知 $d = \alpha a + \beta b + \gamma c, a = e_1 + e_2, b = e_2 + e_3, c = e_1 + e_3$, 得 $d = (\alpha + \gamma)e_1 + (\alpha + \beta)e_2 + (\gamma + \beta)e_3$.

又因为 $d = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, 所以

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1, \\ \alpha + \beta = 2, \text{ 则 } \alpha + \beta + \gamma = 3. \\ \gamma + \beta = 3, \end{cases}$$

6. **$-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$** 【解析】连接 AG 交 BC 于点 M , 连接 AE (图略), 则 $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

7. 【证明】(1) 连接 BG (图略), 则 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$. 由向量共面的充要条件知 E, F, G, H 四点共面.



(2) $\because E, H$ 分别为 AB, AD 的中点,

$\therefore EH \parallel BD$.

又 $EH \subset$ 平面 $EFGH, BD \not\subset$ 平面 $EFGH$,

$\therefore BD \parallel$ 平面 $EFGH$.

(3) 连接 $OM, OA, OB, OC, OD, OE, OG$

(图略).

$\because \overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}, \therefore \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG},$

\therefore 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

又 $\because M$ 是 EG 和 FH 的交点,

$\therefore EG, FH$ 被点 M 平分.

$\therefore \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OG} =$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) =$

$\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$

8. BCD 【解析】 空间中共面的三个向量不能作为基, 故 A 是假命题;

向量 $a \parallel b$, 即 a, b 可平移到一条直线上, 它们与其他任何向量都会共面, 不能作为基, 故 B 是真命题;

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}$ 不能构成空间的一个基, 即它们共面, 所以 A, B, M, N 共面, 故 C 是真命题;

$\{a, b, c\}$ 是空间的一个基, 即它们不共面, 由 $m = a + c$, 知 m, a, c 共面, 所以 b 与 m, a 不共面, 即 $\{a, b, m\}$ 是空间的一个基, 故 D 是真命题. 故选 BCD.

2.3.2 空间向量运算的坐标表示

表示

题型诀

1-1. D 【解析】 $\because a = (2, -1, 3), b = (-1, 4, -2), c = (1, 3, \lambda)$, 且 a, b, c 共面,

\therefore 可设 $c = ma + nb$, 即 $(1, 3, \lambda) = (2m - n, -m + 4n, 3m - 2n)$,

$\therefore \begin{cases} 2m - n = 1, \\ -m + 4n = 3, \\ 3m - 2n = \lambda, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = 1, \\ n = 1, \\ \lambda = 1. \end{cases}$ 故选 D.



1-2. 【解】(1) 因为 $\overrightarrow{AB} = (4, 1, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (3, -2, 5)$, 所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (4, 1, 2) + (3, -2, 5) = (7, -1, 7)$, 则 $\overrightarrow{CA} = (-7, 1, -7)$, 故 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -21 - 2 - 35 = -58$.

(2) 由(1)知 $\overrightarrow{CA} = (-7, 1, -7)$, 又 $A(2, -5, 3)$, 所以点 C 的坐标为 $(9, -6, 10)$.

设点 O 为坐标原点, 因为 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$, 所

以 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})$, 则 $\overrightarrow{OP} =$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}(2, -5, 3) + \frac{1}{3}(9, -6,$$

$$10) = \left(\frac{13}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right), \text{ 故点 } P \text{ 的坐标}$$

$$\text{为} \left(\frac{13}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right).$$

2-1. AC 【解析】 $\because A(-1, 0, 1), B(-1, 2, 2), C(-3, 0, 4), \therefore \overrightarrow{AB} = (0, 2, 1), \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 3), \overrightarrow{BC} = (-2, -2, 2).$ $\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 2 \times 0 + 1 \times 3 = 3$, 故 A 正确.

\because 不存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, $\therefore \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 不共线, 故 B 错误.

$\because |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$, 故

$$C \text{ 正确. } \because \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} =$$

$$\frac{3}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{65}}{65}, \text{ 故 D 错误. 故选 AC.}$$

2-2. 【解】(1) $\because \overrightarrow{AB} = (-2, -1, 3), \overrightarrow{AC} = (1, -3, 2),$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|,$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} =$$

$$\frac{-2 \times 1 + (-1) \times (-3) + 3 \times 2}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{1}{2},$$

$$\because 0 \leq \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \leq \pi,$$

$$\therefore \sin \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{平行四边形的面积 } S = 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times$$



$$AC \sin \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \sqrt{14} \times \sqrt{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

$$(2) \because P \text{ 是 } BC \text{ 的中点}, \therefore \vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC},$$

$$\therefore \vec{DP} = \vec{AP} - \vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AD},$$

$$\therefore |\vec{DP}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{AB}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{AC}|^2 + |\vec{AD}|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{4} \times$$

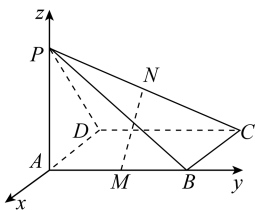
$$(\sqrt{14})^2 + \frac{1}{4} \times (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{7})^2 + \frac{1}{2} \times$$

$$[-2 \times 1 + (-1) \times (-3) + 3 \times 2] - \sqrt{14} \times$$

$$\sqrt{7} \cos 60^\circ \times 2 = \frac{35}{2} - 7\sqrt{2} = \frac{70 - 28\sqrt{2}}{4}.$$

$$\therefore |\vec{DP}| = \frac{\sqrt{70 - 28\sqrt{2}}}{2}.$$

3-1. (1) **【解】** 建立空间直角坐标系, 如图所示.



由题意得 $A(0,0,0), B(0,2,0), D(-2,$

$0,0), C(-2,2,0), P(0,0,2),$

所以 $M(0,1,0), N(-1,1,1),$

所以 $\vec{MN} = (-1,0,1),$

故 M, N 两点之间的距离 $|\vec{MN}| =$

$$\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

(2) **【证明】** 由题意得 $\vec{PD} = (-2,0,-2),$

$$\vec{CD} = (0,-2,0).$$

因为 $\vec{MN} \cdot \vec{PD} = 0,$ 所以 $\vec{MN} \perp \vec{PD},$

即 $MN \perp PD.$

因为 $\vec{MN} \cdot \vec{CD} = 0,$ 所以 $\vec{MN} \perp \vec{CD},$

即 $MN \perp CD.$

又 $PD \cap CD = D, PD, CD \subset \text{平面 } PCD,$

所以 $MN \perp \text{平面 } PCD.$

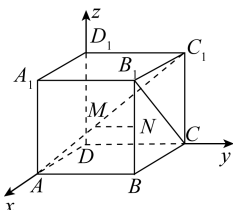
3-2. 【解】 (1) 以点 D 为坐标原点建立如



图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $A(a, 0, 0), C(0, a, 0), C_1(0, a, a),$

$B_1(a, a, a), B(a, a, 0), N\left(a, a, \frac{a}{2}\right)$.



设 $M(x, y, z), \because$ 点 M 在 AC_1 上, 且 $\overrightarrow{AM} =$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{MC_1},$$

$$\therefore (x-a, y, z) = \frac{1}{2}(-x, a-y, a-z),$$

$$\therefore x = \frac{2a}{3}, y = \frac{a}{3}, z = \frac{a}{3},$$

$$\therefore M\left(\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right), \therefore |\overrightarrow{MN}| =$$

$$\sqrt{\left(a - \frac{2a}{3}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{21}}{6}a,$$

即 MN 的长度为 $\frac{\sqrt{21}}{6}a$.

$$(2) \text{ 易知 } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{a}{6}\right), \overrightarrow{CB_1} = (a,$$

$$0, a),$$

$$\text{则 } \cos \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{CB_1}|} = \frac{\sqrt{42}}{14}.$$

巩固练

$$1. \text{ B } \quad \text{【解析】} 2a+b = (2x+1, 4, 4-y),$$

$$-a+2b = (2-x, 3, -2y-2).$$

$\therefore (2a+b) \parallel (-a+2b), \therefore$ 存在非零实

数 λ , 使 $2a+b = \lambda(-a+2b),$

$$\therefore \begin{cases} 2x+1 = \lambda(2-x), \\ 4 = 3\lambda, \\ 4-y = \lambda(-2y-2), \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -4. \end{cases}$$

$$2. \text{ B } \quad \text{【解析】} \text{ 设 } e = \lambda a = (\lambda, -\lambda, 0) (\lambda \in$$

$$\mathbf{R}), \text{ 由已知可得 } |e| = \sqrt{\lambda^2 + (-\lambda)^2} =$$



$$\sqrt{2}|\lambda|=1, \text{解得 } \lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{因此, } \boldsymbol{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ 或 } \boldsymbol{e} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ 故选 B.}$$

3. **C** 【解析】对于 A, 因为 $\boldsymbol{a}=(0,1,0)$,

$$\boldsymbol{b}=(3,0,2), \boldsymbol{c}=(2,1,-3),$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3}\boldsymbol{b} = \left(2, 0, \frac{4}{3}\right), \boldsymbol{c} - \frac{2}{3}\boldsymbol{b} =$$

$$\left(0, 1, -\frac{13}{3}\right), \text{所以 } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{c} - \frac{2}{3}\boldsymbol{b}, \text{故 A 不}$$

正确;

$$\text{对于 B, 由题得 } |\boldsymbol{a}| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1,$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2+0^2+2^2} = \sqrt{13}, |\boldsymbol{c}| =$$

$$\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{14},$$

所以 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \neq |\boldsymbol{c}|$, 故 B 不正确;

$$\text{对于 C, 由题得 } \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(-2,0,3), \text{又 } \boldsymbol{b}=$$

$$(3,0,2), \text{所以 } \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) = 3 \times (-2) +$$

$$0 \times 0 + 2 \times 3 = 0, \text{即 } \boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}), \text{故 C}$$

正确;

$$\text{对于 D, 由题得 } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \times 3 + 1 \times 0 + 0 \times$$

$$2 = 0, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 3 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times (-3) = 0,$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 2 \times 0 + 1 \times 1 + (-3) \times 0 = 1, \text{所以}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}, \text{故 D 不正确. 故}$$

选 C.

4. **C** 【解析】由题意可得 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 -$

$$\lambda = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sqrt{1+\lambda^2} \times$$

$$\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} \times \frac{2}{3}, \text{解得 } \lambda = 0 \text{ 或 } \lambda =$$

$$-\frac{4}{3}. \text{ 故选 C.}$$

5. **C** 【解析】 $\because \boldsymbol{a}=(t,1,t), \boldsymbol{b}=(t-2,t,1),$

$$\therefore \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,1-t,t-1).$$

$$\text{则 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = \sqrt{2^2+(1-t)^2+(t-1)^2} =$$

$$\sqrt{2(t-1)^2+4},$$

\therefore 当 $t=1$ 时, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 取最小值为 2.



故选 C.

6. B 【解析】以点 A 为坐标原点, AB , AD , AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

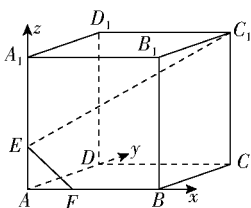
如图所示, 则 $C_1(4, 4, 4)$. 设 $E(0, 0, z)$, $z \in [0, 4]$, $F(x, 0, 0)$, $x \in [0, 4]$, 则 $AF = x$. $\overrightarrow{EC_1} = (4, 4, 4 - z)$, $\overrightarrow{EF} = (x, 0, -z)$.

因为 $C_1E \perp EF$, 所以 $\overrightarrow{EC_1} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, 即

$$z^2 + 4x - 4z = 0, \text{ 则 } x = z - \frac{1}{4}z^2 = -\frac{1}{4}(z - 2)^2 + 1.$$

当 $z = 2$ 时, x 取得最大值, 最大值为 1.

所以 AF 的最大值为 1. 故选 B.



7. 2 【解析】因为 a, b, c 共面, 所以可设

$$a = mb + nc, m, n \in \mathbf{R}, \text{ 则 } a = (0, m, 2m) + (n, 0, 0) = (n, m, 2m) = (2, x,$$

$$4), \text{ 则有 } \begin{cases} n = 2, \\ m = x, \\ 2m = 4, \end{cases} \text{ 解得 } x = 2.$$

8. (1, 2, 0) (答案不唯一) 【解析】由点

$$A(-1, 1, 0), B(1, 3, 2), \text{ 可得 } \overrightarrow{AB} = (2, 2, 2).$$

因为向量 $a = (x, y, z)$ 在 \overrightarrow{AB} 上的投影向量为 $(1, 1, 1)$,

$$\text{所以 } \frac{a \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2x + 2y + 2z}{2^2 + 2^2 + 2^2} \cdot (2, 2,$$

$$2) = \frac{x + y + z}{6} (2, 2, 2) = (1, 1, 1),$$

$$\text{可得 } \frac{x + y + z}{3} = 1.$$

又向量 \overrightarrow{AB} 与向量 a 不共线, 则 $\frac{x}{2} =$



$$\frac{y}{2} = \frac{z}{2} \text{ 不成立,}$$

则可令 $x=1, y=2, z=0$, 即 $\mathbf{a}=(1, 2, 0)$

(答案不唯一).

9. $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ 【解析】设 $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP} =$

$(\lambda, \lambda, 2\lambda)$, 故 $Q(\lambda, \lambda, 2\lambda)$, 故 $\overrightarrow{QA} =$
 $(1-\lambda, 2-\lambda, 3-2\lambda)$, $\overrightarrow{QB} = (2-\lambda, 1-\lambda, 2-$
 $2\lambda)$.

$$\text{则 } \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 6\lambda^2 - 16\lambda + 10 =$$

$$6\left(\lambda - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3},$$

当 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 取最小值时, $\lambda = \frac{4}{3}$,

此时点 Q 的坐标为 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

10. 【解】(1) \because 向量 $\mathbf{a}=(x, 1, 2), \mathbf{b}=(1,$

$$y, -2), \mathbf{c}=(3, 1, z),$$

$$\text{且 } \mathbf{a} // \mathbf{b}, \mathbf{b} \perp \mathbf{c},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{1}{y} = \frac{2}{-2}, \\ 3+y-2z=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=-1, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$$

$$\therefore \text{向量 } \mathbf{a}=(-1, 1, 2), \mathbf{b}=(1, -1,$$

$$-2), \mathbf{c}=(3, 1, 1).$$

$$(2) \because \mathbf{a}+\mathbf{c}=(2, 2, 3), \mathbf{b}+\mathbf{c}=(4, 0,$$

$$-1),$$

$$\therefore (\mathbf{a}+\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 2 \times 4 + 2 \times 0 + 3 \times$$

$$(-1) = 5,$$

$$|\mathbf{a}+\mathbf{c}| = \sqrt{2^2+2^2+3^2} = \sqrt{17},$$

$$|\mathbf{b}+\mathbf{c}| = \sqrt{4^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{17},$$

\therefore 向量 $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 所成角的余弦值

$$\text{为 } \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c})}{|\mathbf{a}+\mathbf{c}| |\mathbf{b}+\mathbf{c}|} = \frac{5}{\sqrt{17} \times \sqrt{17}} =$$

$$\frac{5}{17}.$$



11. 【解】 (1) 由已知得 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1) - (-2, 0, 1) = (1, 1, 0)$,
 $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 3) - (-2, 0, 1) = (-1, 0, 2)$,
 所以 $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} = (1, 1, 0) + (-k, 0, 2k) = (1-k, 1, 2k)$,
 $k\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = (k, k, 0) - (-2, 0, 4) = (k+2, k, -4)$.

因为 $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ 互相垂直,

所以 $(1-k, 1, 2k) \cdot (k+2, k, -4) = (1-k) \cdot (k+2) + k - 8k = 0$,

即 $k^2 + 8k - 2 = 0$,

解得 $k = -4 + 3\sqrt{2}$ 或 $k = -4 - 3\sqrt{2}$.

(2) 因为 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{5}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -1$,

所以 $\cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}|} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}(-1, 0, 2) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,

所以向量 \boldsymbol{a} 在向量 \boldsymbol{b} 上的投影向量

$\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right)$.

12. BD 【解析】 由 $M(-1, 1, 3), N(-2, -1, 4)$, 得 $\overrightarrow{MN} = (-1, -2, 1)$.

A 选项, $\overrightarrow{NO} = (5, 6, -6)$, 因为 $\overrightarrow{MN} \neq \lambda \overrightarrow{NO}$, 所以 M, N, O 三点不共线, 故错误;

B 选项, $\overrightarrow{NO} = (-2, -4, 2)$, 因为 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{NO}$, 所以 M, N, O 三点共线, 故正确;

C 选项, $\overrightarrow{NO} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -6\right)$, 因为 $\overrightarrow{MN} \neq \lambda \overrightarrow{NO}$, 所以 M, N, O 三点不共



线,故错误;

D 选项, $\vec{NO} = (2, 4, -2)$, 因为 $\vec{MN} = -\frac{1}{2}\vec{NO}$, 所以 M, N, O 三点共线, 故正确.

故选 BD.

13. ACD 【解析】取 CD 中点为 G , 连接 BG , 以 B 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $B(0, 0, 0), C(1, \sqrt{3}, 0)$,

$D(-1, \sqrt{3}, 0), A\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

$G(0, \sqrt{3}, 0), E\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

所以 $\vec{AB} = \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

$\vec{AC} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

$\vec{EF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$,

$\vec{FG} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

$\vec{EG} = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

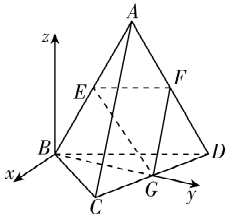
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2$, 故 A 正确;

$\vec{EF} \cdot \vec{FG} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$, 故 B 错误;

$\vec{AB} \cdot \vec{EG} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$, 故 C 正确;

$\vec{GE} \cdot \vec{GF} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, 故 D 正确.

故选 ACD.





2.4 空间向量在立体几何中的应用

2.4.1 空间直线的方向向量和平面的法向量+2.4.2 空间线面位置关系的判定

题型诀

1-1. A 【解析】因为两条不重合直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2, 0, 2)$, 所以 $\boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{v}_1$, 即 \boldsymbol{v}_2 与 \boldsymbol{v}_1 共线. 所以两条不重合直线 l_1 和 l_2 的位置关系是平行, 故选 A.

2-1. D 【解析】求与 \boldsymbol{n} 共线的一个向量, 易知 $(2, -3, 1) = -(-2, 3, -1)$. 故选 D.

2-2. $(1, 0, -1)$ (答案不唯一) 【解析】

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形, 且 $AB = \sqrt{2}$,
 $\therefore AO = OC = 1, \therefore \overrightarrow{OC} = (0, 1, 0)$.

$\because A(0, -1, 0), B(1, 0, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \therefore \overrightarrow{A_1B_1} = (1, 1, 0)$.

$\because OA = 1, AA_1 = \sqrt{2}, \therefore OA_1 = \sqrt{2-1} = 1$,

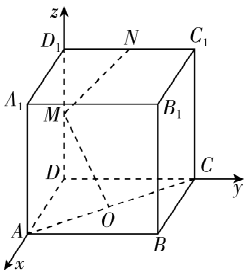
$\therefore \overrightarrow{OA_1} = (0, 0, 1). \therefore \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = (1, 1, 1)$.

设向量 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$, \because 向量 \boldsymbol{n} 是平面 OCB_1 的法向量,

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{OC} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \\ \overrightarrow{OB_1} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} y = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

$\therefore y = 0, x = -z$, 取 $x = 1, \therefore z = -1, \therefore$ 平面 OCB_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n} = (1, 0, -1)$, 故答案为 $(1, 0, -1)$ (答案不唯一).

3-1. AC 【解析】如图, 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系.





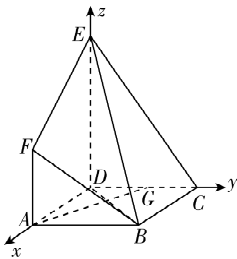
设正方体的棱长为 $2a$, 则 $D(0, 0, 0)$, $D_1(0, 0, 2a)$, $M(0, 0, a)$, $A(2a, 0, 0)$, $C(0, 2a, 0)$, $O(a, a, 0)$, $N(0, a, 2a)$, $A_1(2a, 0, 2a)$, $\overrightarrow{OM} = (-a, -a, a)$, $\overrightarrow{MN} = (0, a, a)$, $\overrightarrow{AC} = (-2a, 2a, 0)$, $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2a)$.

$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 2a^2 \neq 0$, $\therefore OM \perp AC$, $OM \perp MN$, OM 与 AA_1 不垂直. 故选 AC.

3-2. 【证明】 设正方体的棱长为 1, $\frac{AM}{AD'} =$

$\frac{BN}{BD} = \lambda$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{c}$, 则 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BD} - \lambda \overrightarrow{AD'} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \lambda(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (1 - \lambda)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, $\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MN} = \mathbf{b} \cdot [(1 - \lambda)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}] = (1 - \lambda)\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, $\therefore \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{MN}$, $\therefore MN \perp AD$.

4-1. 【证明】 如图, 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系, 则 $A(1, 0, 0)$, $E(0, 0, 2)$, $B(1, \sqrt{2}, 0)$, $G(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $D(0, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{AG} = (-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $\overrightarrow{DE} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{DB} = (1, \sqrt{2}, 0)$.



$\therefore \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$,

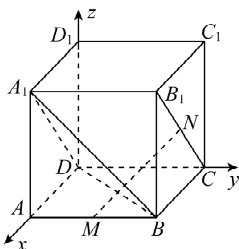
$\therefore DE \perp AG$, $DB \perp AG$.

又 $BD \cap DE = D$, $BD, DE \subset$ 平面 DBE ,

$\therefore AG \perp$ 平面 DBE .

4-2. 【证明】 以 D 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系.

设正方体的棱长为 2, 则 $D(0, 0, 0)$, $A_1(2, 0, 2)$, $B(2, 2, 0)$.



设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\therefore \overrightarrow{DA_1} = (2, 0, 2), \overrightarrow{DB} = (2, 2, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} 2x + 2z = 0, \\ 2x + 2y = 0, \end{cases}$$

取 $x = -1$, 则 $\mathbf{m} = (-1, 1, 1)$.

$\therefore M, N$ 分别为 AB, B_1C 的中点,

$$\therefore M(2, 1, 0), N(1, 2, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = (-1, 1, 1), \therefore \mathbf{m} = \overrightarrow{MN},$$

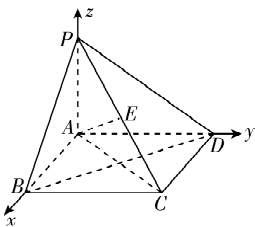
$$\therefore \overrightarrow{MN} // \mathbf{m}, \therefore MN \perp \text{平面 } A_1BD.$$

5-1.6 【解析】 \therefore 平面 α, β 的法向量分别为 $\mathbf{u} = (3, -1, z), \mathbf{v} = (-2, -y, 1), \alpha \perp \beta, \therefore \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -6 + y + z = 0, \therefore y + z = 6$.

5-2. 【证明】如图, 以 A 为原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $B(2, 0, 0), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0),$

$P(0, 0, 2)$.



(1) 因为 E 是 PC 的中点, 所以点 E 的坐标为 $(1, 1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AE} = (1, 1, 1)$.

又因为 $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PD} = 1 \times 0 + 1 \times 2 + 1 \times (-2) = 0$, 所以 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{PD}$, 所以 $AE \perp PD$.

(2) 因为底面 $ABCD$ 是正方形,

所以 $BD \perp AC$.

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BD \perp PA$.

因为 $AC \cap PA = A$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAC .



方法一：平面 PAC 的法向量为 $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$.

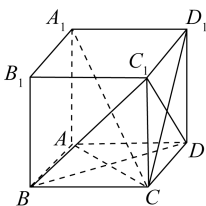
设平面 PBD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 又 $\overrightarrow{PB} = (2, 0, -2)$, $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$,
由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 2x - 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 2y - 2z = 0, \end{cases}$

取 $z = 1$, 则 $x = 1, y = 1$, 所以平面 PBD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$.

因为 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-2) + 1 \times 2 + 1 \times 0 = 0$, 所以 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{BD}$, 所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAC .

方法二：因为 $BD \perp$ 平面 PAC , $BD \subset$ 平面 PBD , 所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAC .

6-1. 【证明】如图, 连接 AC, D_1C .



因为在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 AC 是 A_1C 在平面 $ABCD$ 内的射影.

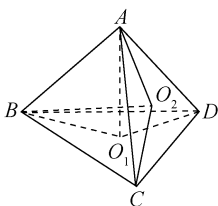
因为 $AC \perp BD$, 所以 $BD \perp A_1C$.

同理 D_1C 是 A_1C 在平面 CDD_1C_1 内的射影.

又因为 $C_1D \perp D_1C$, 所以 $C_1D \perp A_1C$.

又 $C_1D \cap BD = D$, 所以 $A_1C \perp$ 平面 BDC_1 .

6-2. 【证明】连接 DO_1, BO_1, AO_2, CO_2 .



$\because O_1$ 是 $\triangle BCD$ 的垂心, $\therefore DO_1 \perp BC$.

$\therefore BC \perp AD$ (三垂线定理).

$\because BC$ 是平面 ACD 的斜线, $BO_2 \perp$ 平面 ACD ,

$\therefore CO_2$ 是 BC 在平面 ACD 内的射影,

$\therefore CO_2 \perp AD$ (三垂线定理的逆定理).

同理, $AO_2 \perp CD$. $\therefore O_2$ 是 $\triangle ACD$ 的垂心.



7-1. B 【解析】由题意得 $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 3)$, $\overrightarrow{CD} = (1, 1, -1)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$, 所以 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{CD} 共线. 又 AB 与 CD 没有公共点, 所以 $AB \parallel CD$. 故选 B.

7-2. B 【解析】以 D 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系. 令 $AD = 1$, 则 $\overrightarrow{DA_1} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$, 设 $\overrightarrow{PQ} = (a, b, c)$, 由 $PQ \perp A_1D$, $PQ \perp AC$, 得

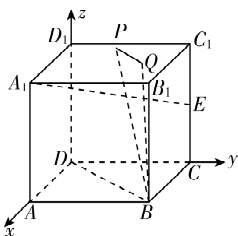
$$\begin{cases} a+c=0, \\ -a+b=0, \end{cases} \quad \text{令 } a=1, \text{ 则 } b=1, c=-1, \text{ 则}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, -1). \because \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{DB} = (0, 0, 1) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 1) = -\overrightarrow{PQ},$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{BD_1}. \text{ 又 } PQ \text{ 与 } BD_1 \text{ 没有公共点,}$$

$$\therefore PQ \parallel BD_1.$$

7-3. 平行 【解析】以 D 为原点, 以 DA, DC, DD_1 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系如图所示,



则 $A_1(1, 0, 1)$, $E\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$, $B(1, 1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{A_1E} = \left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right)$. 因为 P, Q 均在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内, 所以设 $P(a, b, 1)$, $Q(m, n, 1)$, 所以 $\overrightarrow{BP} = (a-1, b-1, 1)$, $\overrightarrow{BQ} = (m-1, n-1, 1)$. 因为 $BP \perp A_1E$,

$BQ \perp A_1E$, 所以
$$\begin{cases} \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{A_1E} = 0, \\ \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{A_1E} = 0, \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} b-a = \frac{1}{2}, \\ n-m = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{PQ} = (n-b, n-b, 0)$. 又 $\overrightarrow{BD} = (-1, -1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{BD}$. 又 PQ 与 BD 没有



公共点, 所以 PQ 与 BD 的位置关系是平行.

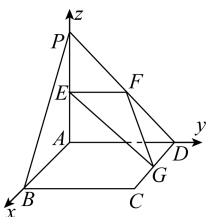
8-1. C 【解析】因为直线 l 的方向向量为 $m = (1, -2, 4)$, 平面 α 的法向量为 $n = (x, 1, -2)$,

直线 l 与平面 α 平行, 则 $m \perp n$, 即 $m \cdot n = 0$, $x - 2 - 8 = 0$, 解得 $x = 10$. 故选 C.

8-2. 【证明】由已知易得, $AP \perp AD$.

又 \because 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore AB, AP, AD$ 两两垂直.

以 A 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$, 则 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 2), E(0, 0, 1), F(0, 1, 1), G(1, 2, 0)$.



$\overrightarrow{PB} = (2, 0, -2), \overrightarrow{FE} = (0, -1, 0), \overrightarrow{FG} = (1, 1, -1)$.

设 $\overrightarrow{PB} = s\overrightarrow{FE} + t\overrightarrow{FG}$, 即 $(2, 0, -2) = s(0, -1, 0) + t(1, 1, -1)$,

$$\therefore \begin{cases} t = 2, \\ t - s = 0, \\ -t = -2, \end{cases} \text{ 解得 } s = t = 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{FE} + 2\overrightarrow{FG}.$$

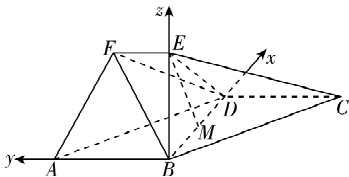
又 $\because \overrightarrow{FE}$ 与 \overrightarrow{FG} 不共线,

$\therefore \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{FE}$ 与 \overrightarrow{FG} 共面.

$\because PB \not\subset$ 平面 EFG ,

$\therefore PB \parallel$ 平面 EFG .

8-3. 【证明】 $\because EB \perp$ 平面 $ABCD, AB \perp BD$, \therefore 以 B 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系.





$$\begin{aligned} \because AB=2, EB=\sqrt{3}, EF=1, BC=\sqrt{13}, \\ \therefore B(0,0,0), D(3,0,0), A(0,2,0), \\ E(0,0,\sqrt{3}), F(0,1,\sqrt{3}), M\left(\frac{3}{2},0,0\right), \\ \therefore \overrightarrow{EM}=\left(\frac{3}{2},0,-\sqrt{3}\right), \overrightarrow{AD}=(3,-2,0), \\ \overrightarrow{AF}=(0,-1,\sqrt{3}). \end{aligned}$$

设平面 ADF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

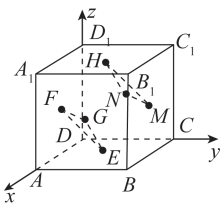
$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AD}=3x-2y=0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AF}=-y+\sqrt{3}z=0, \end{cases}$$

令 $y=3$, 得 $\boldsymbol{n}=(2,3,\sqrt{3})$.

又 $\because \overrightarrow{EM} \cdot \boldsymbol{n}=3-3=0, \therefore \boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{EM}$.

又 $EM \not\subset$ 平面 $ADF, \therefore EM \parallel$ 平面 ADF .

9-1. 【证明】 如图所示, 建立空间直角坐标系, 不妨设正方体的棱长为 2, 则 $E(1,1,0), F(1,0,1), G(2,1,1), H(1,1,2), M(1,2,1), N(0,1,1)$.



$$\therefore \overrightarrow{EF}=(0,-1,1), \overrightarrow{EG}=(1,0,1), \overrightarrow{HM}=(0,1,-1), \overrightarrow{HN}=(-1,0,-1).$$

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1), \boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别是平面 EFG 和平面 HMN 的法向量,

$$\text{由} \begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{EF}=0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{EG}=0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -y_1+z_1=0, \\ x_1+z_1=0, \end{cases}$$

令 $x_1=1$, 得 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-1)$.

$$\text{由} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{HM}=0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{HN}=0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y_2-z_2=0, \\ -x_2-z_2=0, \end{cases}$$

令 $x_2=1$, 得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$.

$\therefore \boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$, 即 $\boldsymbol{m} \parallel \boldsymbol{n}$,

\therefore 平面 $EFG \parallel$ 平面 HMN .

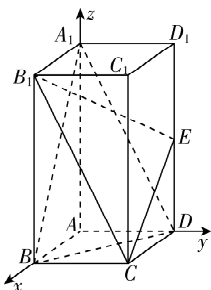
9-2. 【解】 以 A 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B_1(2,0,4), E(0,2,2), A_1(0,0,4), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0),$



$$\therefore \overrightarrow{B_1E} = (-2, 2, -2), \overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -4),$$

$$\overrightarrow{CE} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -4).$$



设平面 B_1CE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{B_1E} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -2x + 2z = 0, \\ -2x + 2y - 2z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 可得 $\mathbf{m} = (1, 2, 1)$.

同理可得平面 A_1BD 的法向量为

$$\mathbf{n} = (2, 2, 1).$$

显然两平面的法向量不平行,

\therefore 平面 B_1CE 与平面 A_1BD 不平行.

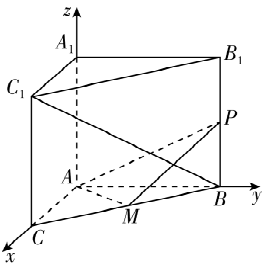
10-1. (1) 【证明】 因为在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , 所以 $BB_1 \perp$

底面 ABC , 因为 $AB = AC = 2$, M 为 BC 的中点, 所以 $AM \perp BC$, 又 $AM \subset$ 底面 ABC , 所以 $AM \perp BB_1$,

又 $BC \cap BB_1 = B$, $BC, BB_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $AM \perp$ 平面 BB_1C_1C .

因为 $AM \subset$ 平面 APM , 所以平面 $APM \perp$ 平面 BB_1C_1C .

(2) **【解】** 以 A 为原点, AC, AB, AA_1 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $B(0, 2, 0)$, $C_1(2, 0, \sqrt{3})$, $A(0, 0, 0)$.

设 $BP = t$ ($0 \leq t \leq \sqrt{3}$), 则 $P(0, 2, t)$,

$$\overrightarrow{BC_1} = (2, -2, \sqrt{3}), \overrightarrow{AP} = (0, 2, t).$$



若直线 BC_1 与 AP 能垂直, 则 $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AP} =$

$$0 - 4 + \sqrt{3}t = 0, \text{ 解得 } t = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

又 $t = \frac{4\sqrt{3}}{3} > BB_1 = \sqrt{3}$, 不满足题意, 所以直线 BC_1 与 AP 不能垂直.

10-2. 【解】 在平面 BCC_1B_1 内过 B_1 作 $B_1O \perp BC$ 于 O .

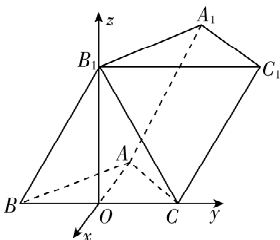
\because 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC , 且交于 BC ,

$\therefore B_1O \perp$ 平面 $ABC, \therefore \angle B_1BC = 60^\circ$.

又 \because 四边形 BCC_1B_1 是菱形, $\therefore O$ 为 BC 的中点.

以 O 为坐标原点, 建立如图所示空间直角坐标系,

则 $A(-\sqrt{3}, 0, 0), B(0, -1, 0), C(0, 1, 0), A_1(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}), B_1(0, 0, \sqrt{3}), C_1(0, 2, \sqrt{3})$.



假设在线段 A_1C_1 上存在点 P 满足题意,

设 $\overrightarrow{C_1P} = \lambda \overrightarrow{C_1A_1} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{C_1P} = \lambda(-\sqrt{3}, -1, 0) = (-\sqrt{3}\lambda, -\lambda, 0)$, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1P} = (-\sqrt{3}\lambda, 1-\lambda, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{B_1C} = (0, 1, -\sqrt{3})$.

设平面 B_1CP 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CP} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} y - \sqrt{3}z = 0, \\ -\sqrt{3}\lambda x + (1-\lambda)y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

令 $y = \sqrt{3}\lambda$, 则 $z = \lambda, x = 2 - \lambda$,

$\therefore \mathbf{m} = (2 - \lambda, \sqrt{3}\lambda, \lambda)$.

$\overrightarrow{C_1C} = (0, -1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0)$, 设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x', y', z')$,



$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{C_1C} = -y' - \sqrt{3}z' = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = \sqrt{3}x' + y' = 0, \end{cases} \quad \text{令 } z' = 1,$$

则 $y' = -\sqrt{3}, x' = 1, \therefore \vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 1)$.

若平面 $B_1CP \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$$\text{则 } \vec{m} \cdot \vec{n} = (2 - \lambda, \sqrt{3}\lambda, \lambda) \cdot (1, -\sqrt{3}, 1) = 2 - \lambda - 3\lambda + \lambda = 0,$$

$\therefore \lambda = \frac{2}{3} \in [0, 1], \therefore$ 在线段 A_1C_1 上存在

点 P , 使得平面 $B_1CP \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$$\text{且 } C_1P = \frac{4}{3}.$$

巩固练

1. **A** 【解析】由题意得, $A(1, 0, 0)$,

$B(0, 1, 0), P(0, 0, 2), \vec{PA} = (1, 0,$

$-2), \vec{AB} = (-1, 1, 0)$. 设平面 PAB 的法

向量为 $\vec{n} = (x, y, 1)$,

$$\text{则有} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PA} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x - 2 = 0, \\ -x + y = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \end{cases} \therefore \vec{n} = (2, 2, 1).$$

又 $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\vec{n}$, 因此, 平面 PAB 的

一个法向量为 $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$. 故选 A.

2. **C** 【解析】若 $l \perp \alpha$, 则 l 与 m 共线, 故

A 错误;

若 $l // \beta$, 则 $l \perp n$, 即 $l \cdot n = 0$, 故 B

错误;

若 $\alpha \perp \beta$, 则 m 与 n 垂直, 即 $m \cdot n = 0$,

故 C 正确;

若 $\alpha // \beta$, 则 m 与 n 共线, 故 D 错误. 故

选 C.

3. **C** 【解析】连接 AG, BG (图略), 则

AG, BG 分别为 AP, BP 在平面 ABC 内

的射影. 因为 $PA \perp BC$, 所以由三垂线

定理的逆定理知 $AG \perp BC$. 同理, $BG \perp$

AC . 所以点 G 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 故

选 C.

4. **相交且不垂直** 【解析】假设存在 $\lambda \in$



$$\mathbf{R}, \text{使得 } \mathbf{n} = \lambda \mathbf{m}, \text{ 则 } \begin{cases} -2\lambda = 1, \\ 0 = -1, \\ 3\lambda = 2, \end{cases} \text{ 显然方程}$$

组无解, 所以 \mathbf{n}, \mathbf{m} 不平行, 即两个平面不平行.

因为 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = -2 + 6 = 4 \neq 0$, 所以 \mathbf{n} 与 \mathbf{m} 不垂直. 所以两个平面的位置关系是相交且不垂直.

5. **(2, 0, 3)** (答案不唯一) 【解析】由于 $A(1, 2, -2), B(3, 2, 1)$, 所以直线 l 的一个方向向量 $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} = (2, 0, 3)$ (答案不唯一).

6. **C** 【解析】连接 AB_1 , 如图所示.

选项 A: 对任意给定的点 P , 可在 $\triangle ABB_1$ 内作 $PQ \parallel AB_1$ 交 AB 于点 Q , 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $DC_1 \parallel AB_1$, 则 $PQ \parallel DC_1$, 又 $DC_1 \subset$ 平面 A_1C_1D , $PQ \not\subset$ 平面 A_1C_1D ,

所以 $PQ \parallel$ 平面 A_1C_1D , 所以对任意给定的点 P , 存在点 Q , 使得 $PQ \parallel$ 平面 A_1C_1D , 故 A 正确;

选项 B: 对任意给定的点 Q , 可在 $\triangle ABB_1$ 内作 $PQ \parallel AB_1$ 交 BB_1 于点 P ,

在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $DC_1 \parallel AB_1$, 则 $PQ \parallel DC_1$, 又 $DC_1 \subset$ 平面 A_1C_1D , $PQ \not\subset$ 平面 A_1C_1D ,

所以 $PQ \parallel$ 平面 A_1C_1D , 所以对任意给定的点 Q , 存在点 P , 使得 $PQ \parallel$ 平面 A_1C_1D , 故 B 正确.

以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示,

则 $C(0, 1, 0), D_1(0, 0, 2)$, 设 $P(1, 1, m)$ ($0 \leq m \leq 2$), $Q(1, t, 0)$ ($0 \leq t \leq 1$),

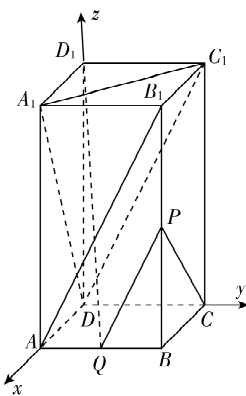
则 $\overrightarrow{CP} = (1, 0, m), \overrightarrow{D_1Q} = (1, t, -2)$.

选项 C: 由 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{D_1Q} = (1, 0, m) \cdot (1, t, -2) = 1 - 2m = 0$, 得 $m = \frac{1}{2}$, 则当 $m \neq \frac{1}{2}$

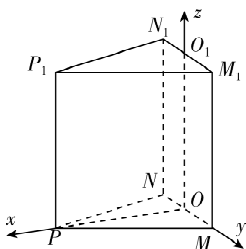


时, $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{D_1Q} \neq 0$, 即 $CP \perp D_1Q$ 不成立, 所以对任意给定的点 P , 不一定存在点 Q , 使得 $CP \perp D_1Q$, 故 C 错误;

选项 D: 由 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{D_1Q} = (1, 0, m) \cdot (1, t, -2) = 1 - 2m = 0$, 得 $m = \frac{1}{2}$, 则对任意 $0 \leq t \leq 1$, 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 均有 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{D_1Q} = 0$, 即 $CP \perp D_1Q$, 所以对任意给定的点 Q , 存在点 P , 使得 $CP \perp D_1Q$, 故 D 正确. 故选 C.



7.2 【解析】 令棱长均相等的直三棱柱为 $PMN-P_1M_1N_1$, 取 MN 的中点为 O , M_1N_1 的中点为 O_1 , 设 $MN = 2$, 连接 OP, OO_1 , 显然 $OO_1 \parallel MM_1$. 又 $MM_1 \perp$ 平面 PMN , 则 $OO_1 \perp$ 平面 PMN , 且易知 $PO \perp MN$. 以点 O 为原点, 向量 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OO_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如图.



对于①, 点 A, D, F 分别与点 P, O, O_1 重合, 点 E 为棱 NN_1 的中点, 有 $A(\sqrt{3}, 0, 0), D(0, 0, 0), F(0, 0, 2), E(0, -1, 1), \overrightarrow{DA} = (\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{EF} = (0, 1, 1)$, 则 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, 因此 $AD \perp EF$, ①满足;

对于②, 点 A 与点 P 重合, 点 D, E, F



分别为棱 NN_1, MM_1, P_1N_1 的中点,

有 $A(\sqrt{3}, 0, 0), D(0, -1, 1), E(0, 1, 1), F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right), \overrightarrow{DA} = (\sqrt{3}, 1, -1), \overrightarrow{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right),$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + (-1) \times 1 = -1 \neq 0$, 所以 AD 与 EF 不垂直, ②不满足;

对于③, 点 A, D, E 分别与点 P, O_1, O 重合, 点 F 为棱 P_1M_1 的中点,

有 $A(\sqrt{3}, 0, 0), D(0, 0, 2), E(0, 0, 0), F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2\right), \overrightarrow{DA} = (\sqrt{3}, 0, -2), \overrightarrow{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2\right),$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + (-2) \times 2 = -\frac{5}{2} \neq 0$,

所以 AD 与 EF 不垂直, ③不满足;

对于④, 点 A, F 分别与点 N, O_1 重合, 点 D, E 分别为棱 PP_1, PM 的中点,

有 $A(0, -1, 0), D(\sqrt{3}, 0, 1), F(0, 0, 2), E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \overrightarrow{DA} = (-\sqrt{3}, -1, -1), \overrightarrow{EF} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right),$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF} = -\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \times 2 = 0$, 因此 $AD \perp EF$,

④满足.

所以满足 $AD \perp EF$ 的图形个数是 2.

8. $\frac{2}{3}$ 【解析】如图, 以 D 为原点, $DA,$

DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 0), A_1(1, 0, 2), B_1(1, 1, 2), C_1(0, 1, 2), D_1(0, 0, 2), \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2).$



设平面 A_1ACC_1 的法向量为 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} \cdot \overrightarrow{AC} = -x + y = 0, \\ \boldsymbol{p} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 2z = 0, \end{cases}$$

取 $x = 1$, 则 $y = 1, z = 0$, 即 $\boldsymbol{p} = (1, 1, 0)$.

又 $\overrightarrow{A_1B} = (0, 1, -2), \overrightarrow{B_1C} = (-1, 0, -2), \overrightarrow{A_1B_1} = (0, 1, 0)$.

设 $\overrightarrow{A_1M} = \lambda \overrightarrow{A_1B} (0 \leq \lambda \leq 1), \overrightarrow{B_1N} = \mu \overrightarrow{B_1C} (0 \leq \mu \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1N} = (-\mu, 1 - \lambda, 2\lambda - 2\mu)$.

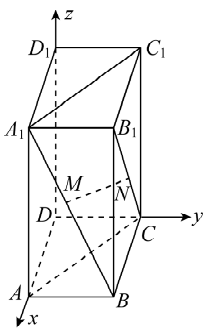
$\therefore MN \parallel$ 平面 $A_1ACC_1, \therefore \overrightarrow{MN} \cdot \boldsymbol{p} = -\mu + 1 - \lambda = 0$, 即 $\lambda + \mu = 1$.

$$\therefore |\overrightarrow{MN}|^2 = (-\mu)^2 + (1 - \lambda)^2 + (2\lambda - 2\mu)^2 = (-\mu)^2 + \mu^2 + 4(1 - 2\mu)^2$$

$$= 18\mu^2 - 16\mu + 4 = 18\left(\mu - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{4}{9},$$

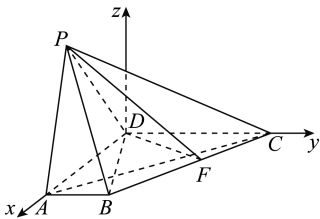
\therefore 当 $\mu = \frac{4}{9}, \lambda = \frac{5}{9}$ 时,

$|\overrightarrow{MN}|^2$ 取得最小值 $\frac{4}{9}$, 即线段 MN 长度的最小值为 $\frac{2}{3}$.



9. (1) 【证明】因为平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$, 又 $AD \perp DC, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AD \perp$ 平面 PCD .

- (2) 【解】以 D 为原点, DA, DC 所在直线分别为 x, y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.





则 $P(0, -1, \sqrt{3}), C(0, 2, 0), A(2, 0, 0), B(2, 1, 0)$.

设线段 BC 上存在点 F , 使得平面

$PDF \perp$ 平面 PAC , 且 $\frac{BF}{BC} = \lambda (0 \leq \lambda \leq$

$1)$, 则 $\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{PB} = (2, 2, -\sqrt{3}),$

$\overrightarrow{BC} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{PA} = (2, 1, -\sqrt{3}),$

$\overrightarrow{PC} = (0, 3, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PD} = (0, 1, -\sqrt{3}),$

$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{PB} + \lambda \overrightarrow{BC} = (2 - 2\lambda, 2 + \lambda, -\sqrt{3}).$

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1),$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 2x_1 + y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0, \\ 3y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $z_1 = \sqrt{3}$, 则 $y_1 = 1, x_1 = 1,$

所以 $\mathbf{m} = (1, 1, \sqrt{3}).$

设平面 PDF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2,$

$$z_2), \text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{PF} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0, \\ (2 - 2\lambda)x_2 + (2 + \lambda)y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $z_2 = \sqrt{3}$, 则 $y_2 = 3, x_2 = \frac{3 + 3\lambda}{2\lambda - 2},$

所以 $\mathbf{n} = \left(\frac{3 + 3\lambda}{2\lambda - 2}, 3, \sqrt{3} \right).$

因为平面 $PDF \perp$ 平面 PAC ,

所以 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, 即 $\frac{3 + 3\lambda}{2\lambda - 2} + 6 = 0$, 解得

$\lambda = \frac{3}{5}$, 所以线段 BC 上存在点 F , 使得

平面 $PDF \perp$ 平面 PAC , 且 $\frac{BF}{BC} = \frac{3}{5}.$

(3)【证明】假设存在点 N 在线段 BC 上, 使得 $MN \parallel PC$.

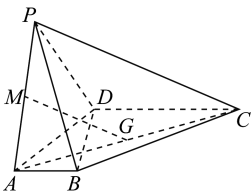
如图所示, 连接 AC , 取其中点 G , 连接 MG .

在 $\triangle PAC$ 中, 因为 M, G 分别是 PA, AC



的中点,所以 $MG \parallel PC$.

可得过点 M 存在两条直线 MN, MG 与 PC 平行,这与过直线外一点只有一条直线和已知直线平行,矛盾.



所以 MN 与 PC 一定不平行.

10. AC 【解析】对于 A, 两条不重合直线 l_1, l_2 的方向向量分别是 $\mathbf{a} = (2, 3, -1), \mathbf{b} = (-2, -3, 1)$, 且 $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$, 所以 $l_1 \parallel l_2$, 故 A 正确;

对于 B, 直线 l 的方向向量是 $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, 平面 α 的法向量是 $\mathbf{u} = (6, 4, -1)$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 1 \times 6 - 1 \times 4 + 2 \times (-1) = 0$, 所以 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$, 故 B 错误;

对于 C, 平面 α, β 的法向量分别是 $\mathbf{u} = (2, 2, -1), \mathbf{v} = (-3, 4, 2)$, 且 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \times (-3) + 2 \times 4 - 1 \times 2 = 0$, 所以 $\alpha \perp \beta$, 故 C 正确;

对于 D, 直线 l 的方向向量是 $\mathbf{a} = (0, 3, 0)$, 平面 α 的法向量是 $\mathbf{u} = (0, -5, 0)$, 且 $\mathbf{u} = -\frac{5}{3}\mathbf{a}$, 所以 $l \perp \alpha$, 故 D 错误. 故选 AC.

11. ABC 【解析】因为 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AD}$, 又 $AB \cap AD = A, AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AP \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 \overrightarrow{AP} 是平面 $ABCD$ 的一个法向量, 所以 A, B, C 正确;

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (2, 3, 4), \overrightarrow{AP} = (-1, 2, -1)$, 不满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{BD}$, 所以 D 不正确. 故选 ABC.

12. C 【解析】由题可知, 平面 α 的方程为 $3x - 4y + z - 7 = 0$, 则平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (3, -4, 1)$, 经过 $(0, 0,$



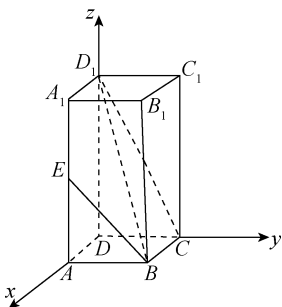
0) 的直线 l 的方程为 $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$, 所以直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{n} = (3, 2, -1)$.

因为 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 9 - 8 - 1 = 0$, 所以 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 又点 $(0, 0, 0)$ 在直线 l 上但不在平面 α 内, 所以直线 l 与平面 α 不重合, 故 $l // \alpha$. 故选 C.

2.4.3 向量与夹角

易错记

1-1. C 【解析】以点 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AA_1 = 2AB = 2$, 则 $B(1, 1, 0), E(1, 0, 1), C(0, 1, 0), D_1(0, 0, 2), \overrightarrow{BE} = (0, -1, 1), \overrightarrow{CB} = (1, 0, 0), \overrightarrow{CD_1} = (0, -1, 2)$.

设平面 BCD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = x = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD_1} = -y + 2z = 0, \end{cases}$$

取 $z = 1$, 则 $y = 2, x = 0$, 即 $\mathbf{n} = (0, 2, 1)$.

设 \overrightarrow{BE} 与平面 BCD_1 的法向量所成角为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{BE}| |\mathbf{n}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

所以 θ 为钝角, 故直线 BE 与平面 BCD_1

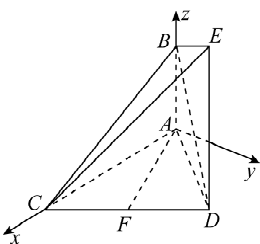
所成的角为 $\theta - \frac{\pi}{2}$, 所求余弦值为 $\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以直线 BE 与平面 BCD_1 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 故选 C.

2-1. (1) 【证明】 设 $AD = DE = 2AB = 2a$.



以 A 为原点, 分别以 AC, AB 所在的直线为 x 轴、 z 轴, 以过点 A 且在平面 ACD 内与 AC 垂直的直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0), C(2a, 0, 0), B(0,0,a), D(a, \sqrt{3}a, 0), E(a, \sqrt{3}a, 2a)$.



$\because F$ 为 CD 的中点, $\therefore F\left(\frac{3a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right)$.

$\therefore \overrightarrow{AF} = \left(\frac{3a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right), \overrightarrow{BE} = (a, \sqrt{3}a, a),$

$\overrightarrow{BC} = (2a, 0, -a),$

$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}),$ 且 $AF \not\subset$ 平面 $BCE,$

$BE, BC \subset$ 平面 $BCE, \therefore AF \parallel$ 平面 $BCE.$

(2) 【解】由(1)知 $\overrightarrow{BD} = (a, \sqrt{3}a, -a).$

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x_1, y_1, z_1),$

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} ax_1 + \sqrt{3}ay_1 + az_1 = 0, \\ 2ax_1 - az_1 = 0, \end{cases}$$

令 $x_1 = 1,$ 则 $z_1 = 2, y_1 = -\sqrt{3},$ 可得 $\boldsymbol{m} = (1, -\sqrt{3}, 2).$

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x_2, y_2, z_2),$

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} ax_2 + \sqrt{3}ay_2 + az_2 = 0, \\ ax_2 + \sqrt{3}ay_2 - az_2 = 0, \end{cases}$$

令 $x_2 = \sqrt{3},$ 则 $y_2 = -1, z_2 = 0,$ 可得 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3}, -1, 0).$

$$\therefore \cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| |\boldsymbol{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

由图可知, 二面角 $C-BE-D$ 为锐角, 故二



面角 $C-BE-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

题型诀

1-1. A 【解析】由题意, 设 $CB=t(t>0)$, 则有 $C(0,0,0), A_1(4,0,4), B(0,t,0), B_1(0,t,4), M\left(2, \frac{t}{2}, 4\right), C_1(0,0,4), \overrightarrow{A_1B}=(-4,t,-4), \overrightarrow{C_1M}=\left(2, \frac{t}{2}, 0\right)$.

由 $\overrightarrow{A_1B} \perp \overrightarrow{C_1M}$ 得, $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{C_1M} = -8 + \frac{t^2}{2} =$

0, 解得 $t=4$ 或 $t=-4$ (负值舍去),

则 $\overrightarrow{CM}=(2,2,4), \overrightarrow{A_1B}=(-4,4,-4)$,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{A_1B} \rangle = \frac{\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{CM}| |\overrightarrow{A_1B}|} =$$

$$\frac{-16}{\sqrt{24} \times \sqrt{48}} = -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

故异面直线 CM 与 A_1B 所成角的余弦值

为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 A.

1-2. 【解】(1) 因为 $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$, 所以 $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{A_1C_1}-\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$, 所以 $\overrightarrow{AB_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \overrightarrow{BC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

(2) 因为 $\overrightarrow{AB_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 所以 $|\overrightarrow{AB_1}|=$

$$\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},$$

$$|\overrightarrow{BC_1}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2}=$$

$$\sqrt{1+1+1+2 \times \frac{1}{2}-2 \times \frac{1}{2}-2 \times \frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}^2=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=1,$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{BC_1}|} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

所以异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦

值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



令 $y_1 = 1$, 解得 $x_1 = -\sqrt{3}, z_1 = \sqrt{3}$, 则 $\mathbf{m} = (-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$.

记直线 CD 与平面 AB_1D 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CD}, \mathbf{m} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{m}}{|\overrightarrow{CD}| |\mathbf{m}|} \right| =$$

$$\frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

故直线 CD 与平面 AB_1D 所成角的正弦

值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

2-2. 【解】由题意知 $D(2, 0, 0), A(0, 0, 0), B(0, 4, 0), A_1(0, 0, 3), M(0, 4, 2), N(1, 4, 0)$.

$$(1) \overrightarrow{DM} = (-2, 4, 2), \overrightarrow{AN} = (1, 4, 0),$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AN} \rangle = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{AN}|} =$$

$$\frac{-2+16}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \frac{14}{2\sqrt{102}} = \frac{7\sqrt{102}}{102}, \text{ 所以异面}$$

直线 DM 与 AN 所成角的余弦值为

$$\frac{7\sqrt{102}}{102}.$$

$$(2) \overrightarrow{AM} = (0, 4, 2), \overrightarrow{AN} = (1, 4, 0),$$

设平面 AMN 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AN} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4y + 2z = 0, \\ x + 4y = 0, \end{cases} \text{ 取 } x = 4, y =$$

$$-1, z = 2.$$

故平面 AMN 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (4, -1,$

$2)$.

$$\text{则 } \cos \langle \overrightarrow{DM}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{DM}| |\mathbf{n}|} =$$

$$\frac{-2 \times 4 + 4 \times (-1) + 2 \times 2}{2\sqrt{6} \times \sqrt{21}} = -\frac{2\sqrt{14}}{21},$$

所以直线 DM 与平面 AMN 所成角的正

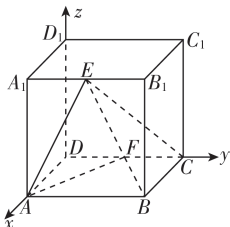
弦值为 $\frac{2\sqrt{14}}{21}$.

3-1. 【解】(1) 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以 D 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(2, 0, 0), F(0, 1, 0), C(0, 2, 0), E(2, 1, 2),$



则 $\overrightarrow{CE} = (2, -1, 2)$,

$$\therefore |\overrightarrow{CE}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$



(2) 由(1)得 $\overrightarrow{CE} = (2, -1, 2)$, $\overrightarrow{AF} = (-2, 1, 0)$, $\therefore \cos \langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CE} \rangle =$

$$\frac{-4-1}{\sqrt{(-2)^2+1^2} \times \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{3},$$

\therefore 直线 EC 与 AF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(3) 平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$, 设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$.

由(1)得 $\overrightarrow{AF} = (-2, 1, 0)$, $\overrightarrow{AE} = (0, 1, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} -2x + y = 0, \\ y + 2z = 0, \end{cases}$$

令 $x=1$, 则 $y=2, z=-1$, $\therefore \mathbf{n}_2 = (1, 2, -1)$.

$$\text{则 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{-1}{\sqrt{1+4+1}} =$$

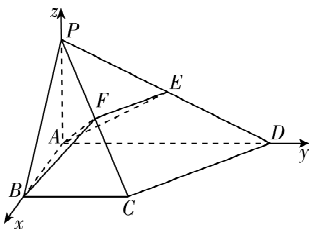
$-\frac{\sqrt{6}}{6}$, 由图知二面角 $E-AF-B$ 为锐二面

角, \therefore 其余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

3-2. (1)【证明】 因为 $AB \perp AD, BC \parallel AD$, 所以 $BC \perp AB$, 又 $PA \perp$ 平面 $ABCD, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp PA$, 而 $PA \cap AB = A, PA, AB \subset$ 平面 PAB , 因此 $BC \perp$ 平面 PAB .

又 $BC \subset$ 平面 PBC , 所以平面 $PBC \perp$ 平面 PAB .

(2)【解】 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD, AB \perp AD$, 所以以点 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,4,0), E(0,2,1), P(0,0,2)$.

设 $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PC} = \lambda(2, 2, -2) = (2\lambda, 2\lambda, -2\lambda)$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PF} = (2\lambda - 2, 2\lambda, 2 - 2\lambda)$,
其中 $0 \leq \lambda \leq 1$,

显然平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $u = (0, 0, 1)$,

依题意, $|\cos \langle u, \overrightarrow{BF} \rangle| = \frac{|u \cdot \overrightarrow{BF}|}{|u| |\overrightarrow{BF}|} =$

$$\frac{2-2\lambda}{\sqrt{2 \times (2\lambda-2)^2 + 4\lambda^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{2}, \text{ 所}$$

以 F 为棱 PC 的中点, 即 $F(1, 1, 1)$.

设平面 AEF 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

$$\overrightarrow{AE} = (0, 2, 1), \overrightarrow{AF} = (1, 1, 1),$$

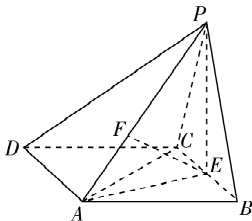
$$\text{则} \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AE} = 2y + z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AF} = x + y + z = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y = 1, \text{ 解得 } z =$$

$$-2, x = 1, \text{ 则 } m = (1, 1, -2).$$

又平面 ADE 的一个法向量为 $n = (1, 0, 0)$, 所以平面 AEF 与平面 ADE 夹角的余

$$\text{弦值为 } |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| |n|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

4-1. (1) 【证明】 连接 PE, AE , 如图所示.



因为 $\triangle PBC$ 为等边三角形,

所以 $PE \perp BC$.

又四边形 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle ADC = 60^\circ$,

所以 $\triangle ABC$ 也是等边三角形, 所以 $AE \perp$

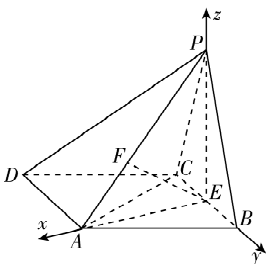
BC , 又 $AE \cap PE = E, AE, PE \subset$ 平面 PAE ,

所以 $BC \perp$ 平面 PAE , 又 $PA \subset$ 平面 PAE ,

所以 $BC \perp PA$.



(2)【解】由平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$, $PE \subset$ 平面 PBC , 平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$, 及 $PE \perp BC$ 可得, $PE \perp$ 平面 ABC , 直线 EA, EB, EP 两两垂直, 以 E 为原点, EA, EB, EP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示.



由题得 $A(\sqrt{3}, 0, 0), E(0, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), C(0, -1, 0)$,

$\overrightarrow{CA} = (\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{CP} = (0, 1, \sqrt{3}), \overrightarrow{PA} = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3})$.

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CA} = \sqrt{3}x + y = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CP} = y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \quad \text{取 } z = 1, \text{ 得 } y =$$

$-\sqrt{3}, x = 1$, 所以 $\boldsymbol{n} = (1, -\sqrt{3}, 1)$.

假设存在满足题意的 F , 则 F 是线段 PA 上的点, 所以存在实数 $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, 使得 $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PA} = (\sqrt{3}\lambda, 0, -\sqrt{3}\lambda)$,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{EP} + \lambda \overrightarrow{PA} = (0, 0, \sqrt{3}) + (\sqrt{3}\lambda, 0, -\sqrt{3}\lambda) = (\sqrt{3}\lambda, 0, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda),$$

设直线 EF 与平面 PAC 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{EF}, \boldsymbol{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}| |\boldsymbol{n}|} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3+1} \cdot \sqrt{3\lambda^2 + 3(1-\lambda)^2}} = \frac{3}{5},$$

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = \frac{2}{3}$, 所以在线段 PA 上

存在点 F 满足题意, 且 F 为线段 PA 上靠近点 P 三等分点或靠近点 A 的三等分点.

4-2. 【解】(1) 以 C 为原点, 分别以 CA, CB, CC_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示,

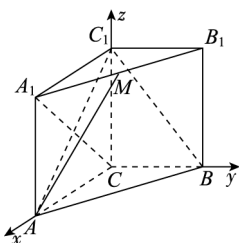


则 $C(0,0,0), A(4,0,0), B(0,4,0),$
 $C_1(0,0,2\sqrt{2}), A_1(4,0,2\sqrt{2}),$
 $B_1(0,4,2\sqrt{2}). \because A_1M=3MB_1, \therefore M(1,3,$
 $2\sqrt{2}), \therefore \overrightarrow{A_1C}=(-4,0,-2\sqrt{2}), \overrightarrow{AM}=(-3,$
 $3,2\sqrt{2}),$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{AM} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{A_1C}| |\overrightarrow{AM}|} =$$

$$\frac{4}{\sqrt{24} \times \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{39}}{39}. \therefore \text{异面直线 } AM \text{ 和}$$

A_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{39}.$



(2) 由(1)得 $\overrightarrow{AB}=(-4,4,0), \overrightarrow{AC_1}=(-4,$
 $0,2\sqrt{2}).$

设 $\mathbf{n}=(a,b,c)$ 是平面 ABC_1 的一个法向

量, 可得
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a + 4b = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = -4a + 2\sqrt{2}c = 0, \end{cases}$$

取 $a=1$, 得 $b=1, c=\sqrt{2}, \therefore \mathbf{n}=(1,1,\sqrt{2}).$

\therefore 直线 AM 与平面 ABC_1 所成角为 $30^\circ,$

$\therefore \overrightarrow{AM}$ 与 \mathbf{n} 所成角为 60° 或 $120^\circ,$

$$\therefore |\cos \langle \overrightarrow{AM}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{1}{2}.$$

设点 M 的横坐标为 x , 则 $\overrightarrow{AM}=(x-4, 4-$
 $x, 2\sqrt{2}),$

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AM}| |\mathbf{n}|} = \frac{|x-4+4-x+\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}|}{2 \sqrt{(x-4)^2 + (4-x)^2 + 8}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2(x-4)^2 + 8}} = \frac{1}{2},$$

解得 $x=2$ 或 $6. \because M$ 在 A_1B_1 上, $\therefore x < 4,$

故 $x=2.$

故点 M 为线段 A_1B_1 的中点时, 直线 AM
 与平面 ABC_1 所成角为 $30^\circ.$

巩固练

1. C 【解析】 \because 两条异面直线的方向向



量分别是 $\mathbf{u} = (3, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, -2, -1)$, $\therefore \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \times 3 + (-1) \times (-2) + 2 \times (-1) = 9$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$, 又这两条异面直线所成的角为 θ , 则

$$\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{9}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{9}{14}. \text{ 故选 C.}$$

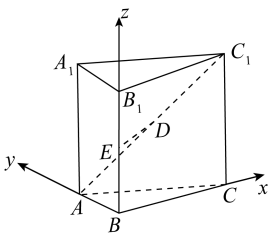
2. **A** 【解析】由已知得 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 则 $AB \perp BC$, 所以以 B 为原点, BC, BA, BB_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示.

设 $AA_1 = 2a$, 则 $A(0, 1, 0)$, $C(\sqrt{3}, 0, 0)$, $C_1(\sqrt{3}, 0, 2a)$, $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, a\right)$, $E(0, 0, a)$, 所以 $\overrightarrow{ED} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

易知平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{ED}, \mathbf{n} \rangle =$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0}} = \frac{1}{2}, \text{ 所以}$$

$\langle \overrightarrow{ED}, \mathbf{n} \rangle = 60^\circ$, 所以直线 DE 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° . 故选 A.



3. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 【解析】因为 $\mathbf{a} = (1, -1, -\sqrt{2})$,

$\mathbf{b} = (1, 3, 0)$, 则 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$

$$\frac{1-3}{\sqrt{1+1+2} \times \sqrt{1+9}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

又异面直线 l_1, l_2 所成角的范围为

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以异面直线 l_1, l_2 所成角

的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.



4. **B** 【解析】以 A 为坐标原点, AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系(图略), 设正方体的棱长为 1, 可得 $B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), A_1(0, 0, 1), B_1(1, 0, 1), C_1(1, 1, 1), D_1(0, 1, 1)$, 设 $F(t, 1, 1-t) (0 \leq t \leq 1)$.

因为 $\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{B_1F} = (t-1, 1, -t)$, 所以 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{B_1F} = 0$, 故异面直线 AC_1 与 B_1F 所成的角是定值, 故①为真命题.

易知三棱锥 $B-A_1EF$ 即三棱锥 $F-A_1BE$, 且三棱锥 $F-A_1BE$ 的底面 A_1BE 的面积为定值. 因为 $CD_1 \parallel BA_1, BA_1 \subset$ 平面 $A_1BE, CD_1 \not\subset$ 平面 A_1BE , 所以 $CD_1 \parallel$ 平面 A_1BE . 又因为点 F 是线段 CD_1 上的一个动点, 所以点 F 到底面 A_1BE 的距离为定值. 故三棱锥 $B-A_1EF$ 的体积是定值, 故②为真命题.

$\overrightarrow{A_1F} = (t, 1, -t), \overrightarrow{B_1C} = (0, 1, -1), \overrightarrow{B_1D_1} = (-1, 1, 0)$, 设平面 B_1CD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = y - z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} = -x + y = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y=1, \text{ 则 } x=1, z=1,$$

则平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, 可得 $\cos \langle \overrightarrow{A_1F}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1F} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{A_1F}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{1+2t^2}}$, 不为定值, 故

③为假命题. 故选 B.

5. $\frac{3\sqrt{11}}{11}$ 【解析】因为 PA, AB, AC 两两

垂直, $PA, AC \subset$ 平面 $PAC, PA \cap AC = A$, 所以 $AB \perp$ 平面 PAC , 则 BD 与平面 PAC 所成角为 $\angle ADB$, 所以 $\tan \angle ADB =$

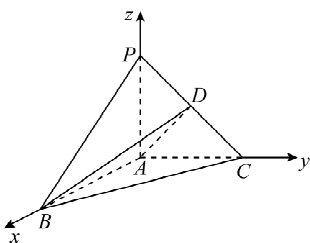
$\frac{AB}{AD} = \frac{3}{AD}$. 当 AD 取得最小值时, $\tan \angle ADB$ 取得最大值, 即 $\angle ADB$ 取得



最大值.

在等腰直角三角形 PAC 中, 当 D 为棱 PC 的中点时, AD 取得最小值. 以 A 为坐标原点, AB, AC, AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $A(0, 0, 0), B(3, 0, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 2), D(0, 1, 1)$,
 则 $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1), \overrightarrow{PC} = (0, 2, -2),$
 $\overrightarrow{BC} = (-3, 2, 0).$



设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 2y - 2z = 0, \\ -3x + 2y = 0, \end{cases}$$

令 $y = 3$, 得 $x = 2, z = 3$, 则平面 PBC 的一个法向量 $\boldsymbol{n} = (2, 3, 3)$.

$$\text{因为 } \cos \langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\boldsymbol{n}| |\overrightarrow{AD}|} =$$

$$\frac{3+3}{\sqrt{22} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}, \text{ 所以 } AD \text{ 与平面}$$

$$PBC \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

6. (1) 【证明】在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中, $DA = DE = \sqrt{2}, \therefore DO \perp AE, DO = 1$.

在 $\triangle OEC$ 中, $OE = \frac{1}{2}AE = 1, EC = \sqrt{2},$

$$\angle OEC = \frac{3}{4}\pi,$$

由余弦定理可得 $OC^2 = 1 + 2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$, 所以 $OC = \sqrt{5},$

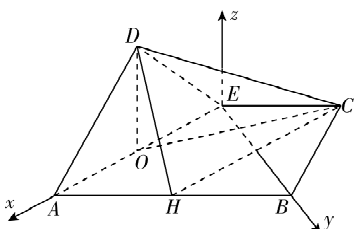
在 $\triangle DOC$ 中, $DC^2 = 6 = DO^2 + OC^2$, 所以 $DO \perp OC$.

(2) 【解】连接 BE , 易得 $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$, 又



因为 $DO \perp AE, DO \perp OC, AE \cap OC = O$,
 $OC, AE \subset$ 平面 $ABCE$, 所以 $DO \perp$ 平面
 $ABCE$.

以 E 为坐标原点, EA, EB 所在直线分
 别为 x 轴, y 轴, 过点 E 且平行于 DO
 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间
 直角坐标系.



则 $D(1, 0, 1), C(-1, 1, 0), A(2, 0, 0)$,
 $B(0, 2, 0)$.

易知平面 ADE 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 =$
 $(0, 1, 0)$,

因为在平面直角坐标系 xOy 中, 直线
 AB 的方程为 $x+y=2$, 所以设点 H 的坐
 标为 $(t, 2-t, 0), t \in [0, 2]$,

则 $\overrightarrow{HC} = (-1-t, t-1, 0), \overrightarrow{DC} = (-2, 1,$
 $-1)$.

设平面 DHC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y,$

$$z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{HC} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} (-1-t)x + (t-1)y = 0, \\ -2x + y - z = 0, \end{cases}$$

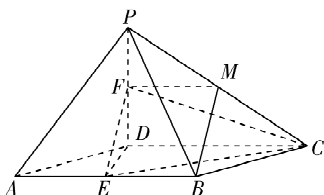
令 $y = 1+t$, 则 $x = t-1, z = 3-t$, 所以 $\mathbf{n}_2 =$
 $(t-1, 1+t, 3-t)$,

$$\text{由已知 } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right| =$$

$$\left| \frac{1+t}{1 \times \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (3-t)^2}} \right|,$$

解得 $t=1$ 或 $t=9$ (舍去), 所以在线段
 AB 上存在点 H 满足题意, 此时 H 是线
 段 AB 的中点.

7. (1) 【证明】如图, 取棱 PC 的中点 M ,
 连接 FM, BM .



在 $\triangle PCD$ 中, M,F 分别为棱 PC,PD 的

中点,所以 $MF \parallel DC, MF = \frac{1}{2}DC$.

在菱形 $ABCD$ 中,因为 $AB \parallel DC$,且 E

为 AB 的中点,则 $BE = \frac{1}{2}DC$,所以

$BE \parallel MF, BE = MF$.

所以四边形 $BEFM$ 为平行四边形,所以

$EF \parallel BM$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 $PBC, BM \subset$ 平面

PBC ,所以 $EF \parallel$ 平面 PBC .

(2)【解】选择条件①:

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, DE, DC \subset$ 平面

$ABCD$,所以 $PD \perp DE, PD \perp DC$.

又因为 $DE \perp PC, PD \cap PC = P, PD,$

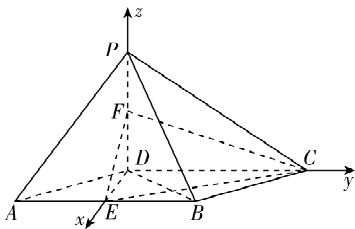
$PC \subset$ 平面 PCD ,

所以 $DE \perp$ 平面 PCD ,又 $DC \subset$ 平面

PCD ,所以 $DE \perp DC$,

以 D 为坐标原点,建立如图所示的空

间直角坐标系 $D-xyz$.



连接 BD ,因为 $AB \parallel DC$,所以 $DE \perp AB$,

又 E 为 AB 的中点,所以 $AD = DB$.

又底面 $ABCD$ 为菱形,故 $AB = AD$,所以

$\triangle ADB$ 为正三角形.

因为 $AD = 2\sqrt{3}$,所以 $DE = 3$.

设 $F(0,0,t) (t > 0), E(3,0,0), C(0,$

$2\sqrt{3},0)$,

则 $\overrightarrow{EF} = (-3,0,t), \overrightarrow{EC} = (-3,2\sqrt{3},0)$,

根据条件,可得平面 FCD 的一个法向



量 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \end{cases} \text{所以} \begin{cases} -3x + tz = 0, \\ -3x + 2\sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

令 $x = 2t$, 则 $y = \sqrt{3}t$, $z = 6$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (2t, \sqrt{3}t, 6)$,

由题意, 二面角 $E-FC-D$ 的大小为 45° ,

$$\text{所以} |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right| =$$

$$\left| \frac{2t}{\sqrt{3t^2 + 4t^2 + 36}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{解得 } t = 6 \text{ 或}$$

$t = -6$ (负值舍去).

因为 F 是棱 PD 的中点, 所以 PD 的长为 12.

经检验符合题意.

选择条件②:

连接 BD , 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, DB , $DC, DE \subset$ 平面 $ABCD$,

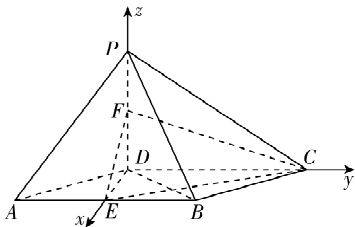
所以 $PD \perp DB, PD \perp DC, PD \perp DE$.

故 $PB^2 = PD^2 + BD^2, PC^2 = PD^2 + DC^2$, 又 $PB = PC$, 所以 $BD = DC$.

又在菱形 $ABCD$ 中, $BC = DC$, 所以 $\triangle BCD$ 为正三角形, 故 $\triangle ADB$ 也为正三角形.

又因为 E 为 AB 的中点, 所以易知 $DE \perp DC$,

以 D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



因为 $\triangle ADB$ 为正三角形且 $AD = 2\sqrt{3}$, 所以 $DE = 3$.

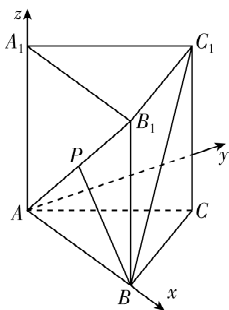
下同选择条件①.



2.4.4 向量与距离

题型诀

1-1. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 连接 BP , 在平面 ABC 内过点 A 作 $Ay \perp AB$, 显然射线 AB, Ay, AA_1 两两垂直, 以 A 为原点, AB, Ay, AA_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 如图.



因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 1, 则 $A(0,0,0), B(1,0,0), B_1(1,0,1), C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, 所以 $\overrightarrow{AB_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{BC_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

因为动点 P 在线段 AB_1 上, 则令 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB_1} = (t, 0, t), 0 \leq t \leq 1$,

即有点 $P(t, 0, t)$, 所以 $\overrightarrow{BP} = (t-1, 0, t)$,

则 $|\overrightarrow{BP}|^2 = (t-1)^2 + t^2 = 2t^2 - 2t + 1$,

从而 $\frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(t+1)$,

因此点 P 到直线 BC_1 的距离

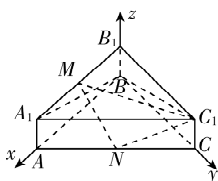
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|}\right)^2} \\ &= \sqrt{2t^2 - 2t + 1 - \frac{1}{8}(t^2 + 2t + 1)} \\ &= \sqrt{\frac{15}{8}t^2 - \frac{9}{4}t + \frac{7}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{15}{8}\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}, \end{aligned}$$

当且仅当 $t = \frac{3}{5}$ 时取等号,



所以线段 AB_1 上的动点 P 到直线 BC_1 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

1-2. 【解】 如本例 2 解析建立空间直角坐标系, 连接 C_1M, C_1N , 如图所示.



则 $M(2, 0, 1), N(2, 2, 0), C_1(0, 4, 1)$,

所以 $\overrightarrow{MN} = (0, 2, -1), \overrightarrow{C_1M} = (2, -4, 0)$.

设平面 C_1MN 内与直线 MN 垂直的向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$,

则由 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{MN}$ 可得 $2y - z = 0$.

由 \boldsymbol{n} 与 $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{C_1M}$ 共面可知, 存在实数 m ,

p , 使得 $\boldsymbol{n} = m\overrightarrow{MN} + p\overrightarrow{C_1M}$,

所以 $(x, y, z) = m(0, 2, -1) + p(2, -4, 0)$,

$0) = (2p, 2m - 4p, -m)$,

$$\text{即} \begin{cases} x = 2p, \\ y = 2m - 4p, \text{ 所以 } y = -2x - 2z. \\ z = -m, \end{cases}$$

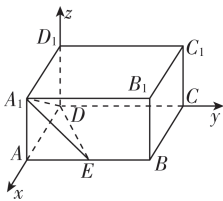
令 $y = 1$, 则 $z = 2, x = -\frac{5}{2}$,

即 $\boldsymbol{n} = \left(-\frac{5}{2}, 1, 2\right)$,

故点 C_1 到直线 MN 的距离 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{C_1M} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|-9|}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

1-3. 【解】 以点 D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 连接 EA_1, ED .



则 $D(0, 0, 0), A_1(1, 0, 1), E(1, 1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{EA_1} = (0, -1, 1), \overrightarrow{A_1D} = (-1, 0, -1)$.

设在平面 EA_1D 内与直线 A_1D 垂直的向



量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则由 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{A_1D}$ 可得 $x+z=0$.

由 \mathbf{n} 与 $\overrightarrow{EA_1}, \overrightarrow{A_1D}$ 共面可知, 存在实数 m ,

p , 使得 $\mathbf{n} = m\overrightarrow{EA_1} + p\overrightarrow{A_1D}$,

所以 $(x, y, z) = m(0, -1, 1) + p(-1, 0,$

$-1) = (-p, -m, m-p)$,

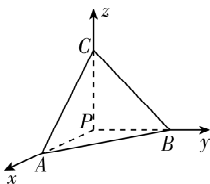
$$\text{即} \begin{cases} x = -p, \\ y = -m, \text{ 所以 } x-y=z. \\ z = m-p, \end{cases}$$

令 $x=1$, 则 $\begin{cases} y=2, \\ z=-1, \end{cases}$ 即 $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$,

故点 E 到直线 A_1D 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{EA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2-1. D 【解析】分别以 PA, PB, PC 所在的直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$,

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$.

设平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y,$

$$z), \text{ 由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -x+y=0, \\ -x+z=0. \end{cases}$$

令 $x=1$, 则 $y=z=1$.

则平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1,$

$1)$.

所以点 P 到平面 ABC 的距离 $d =$

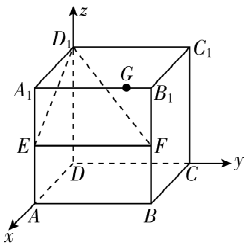
$$\frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 D.}$$

2-2. D 【解析】以 D 为原点, DA 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴, DD_1 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图, 则 $G(2, \lambda, 2), D_1(0, 0, 2), E(2, 0,$

$1), F(2, 2, 1)$, 则 $\overrightarrow{ED_1} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{EF} =$



$$(0, 2, 0), \overrightarrow{EG} = (0, \lambda, 1).$$



设平面 D_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$, 则

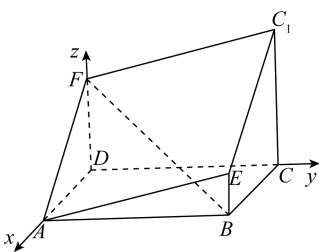
$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{ED_1} = -2x + z = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 2y = 0, \end{cases}$$

取 $x = 1$, 得 $\boldsymbol{n} = (1, 0, 2)$.

\therefore 点 G 到平面 D_1EF 的距离 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{EG} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ 故选 D.}$$

2-3. 【解】(1) 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0), B(2, 4, 0), A(2, 0, 0), C(0, 4, 0), E(2, 4, 1), C_1(0, 4, 3)$.



设 $F(0, 0, z)$.

由题意得 AEC_1F 为平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC_1}, \therefore (-2, 0, z) = (-2, 0, 2),$$

$$\therefore z = 2, \therefore F(0, 0, 2).$$

$\therefore \overrightarrow{BF} = (-2, -4, 2)$, 于是 $|\overrightarrow{BF}| = 2\sqrt{6}$, 即 BF 的长为 $2\sqrt{6}$.

(2) 设 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$ 为平面 AEC_1F 的法向量, 由(1)可知 $\overrightarrow{AE} = (0, 4, 1), \overrightarrow{AF} = (-2, 0, 2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + z = 0, \\ -2x + 2z = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则 } z = 1, y = -\frac{1}{4}, \therefore \boldsymbol{n} =$$

$$\left(1, -\frac{1}{4}, 1\right).$$

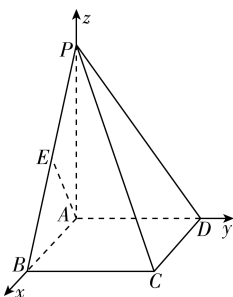
$$\text{又 } \overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 3),$$



\therefore 点 C 到平面 AEC_1F 的距离 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{3}{\frac{\sqrt{33}}{4}} = \frac{4\sqrt{33}}{11}.$$

3-1. 【解】 如图, 以 A 为坐标原点, 射线 AB, AD, AP 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正半轴建立空间直角坐标系.



连接 AE , 设 $D(0, a, 0)$, 则 $B(\sqrt{6}, 0, 0)$,

$C(\sqrt{6}, a, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{6})$, $E\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

因此 $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC} = (0, a, 0)$,

$\overrightarrow{PC} = (\sqrt{6}, a, -\sqrt{6})$.

则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$, 所以 $AE \perp BC$, $AE \perp PC$.

又 $BC \cap PC = C$, $BC, PC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AE \perp$ 平面 PBC .

由 $AD \parallel BC$, $AD \not\subset$ 平面 PBC , $BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AD \parallel$ 平面 PBC .

故直线 AD 与平面 PBC 的距离为点 A 到平面 PBC 的距离, 即为 $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{3}$.

3-2. (1) 【证明】 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, BB_1 是侧棱, 所以 $BB_1 \perp$ 平面 ABC .

又 $CD \subset$ 平面 ABC , 所以 $CD \perp BB_1$.

又 $CD \perp DB_1$, $BB_1 \cap DB_1 = B_1$, $BB_1, DB_1 \subset$ 平面 A_1ABB_1 , 所以 $CD \perp$ 平面 A_1ABB_1 .

因为 $AB \subset$ 平面 A_1ABB_1 , 所以 $CD \perp AB$,

又因为 $CA = CB$, 所以 D 是 AB 的中点.

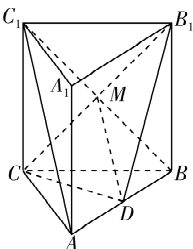
如图, 连接 C_1B 交 CB_1 于点 M , 连接 DM .

易知 M 是 C_1B 的中点, 所以 DM 是



$\triangle ABC_1$ 的中位线, 所以 $DM \parallel AC_1$,

又 $DM \subset$ 平面 CDB_1 , $AC_1 \not\subset$ 平面 CDB_1 , 所以 $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1 .



(2) 【解】取 A_1B_1 的中点 D_1 , 可知 $DD_1 \parallel BB_1$, 所以 $DD_1 \perp$ 平面 ABC . 以 D 为坐标原点, 分别以 DB, DC, DD_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h , 则 $D(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), B_1(1, 0, h), A(-1, 0, 0), \overrightarrow{CD} = (0, -\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CB_1} = (1, -\sqrt{3}, h), \overrightarrow{CB} = (1, -\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{DA} = (-1, 0, 0)$.

设平面 DCB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m} = (x_1,$

$$y_1, z_1), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \boldsymbol{m} = -\sqrt{3}y_1 = 0, \\ \overrightarrow{CB_1} \cdot \boldsymbol{m} = x_1 - \sqrt{3}y_1 + hz_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令}$$

$z_1 = -1$, 得 $\boldsymbol{m} = (h, 0, -1)$.

设平面 BCB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (x_2,$

$$y_2, z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \boldsymbol{n} = x_2 - \sqrt{3}y_2 = 0, \\ \overrightarrow{CB_1} \cdot \boldsymbol{n} = x_2 - \sqrt{3}y_2 + hz_2 = 0, \end{cases}$$

令 $y_2 = 1$, 得 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3}, 1, 0)$.

$$\text{所以 } |\cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}| |\boldsymbol{n}|} = \frac{\sqrt{3}h}{2\sqrt{h^2+1}} =$$

$$\frac{1}{2}, \text{ 解得 } h = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } h = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (负值舍去),}$$

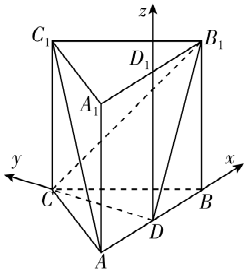
$$\text{所以 } \boldsymbol{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -1 \right),$$

由(1)知 $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1 , 所以直线 AC_1 到平面 CDB_1 的距离即点 A 到平面 CDB_1 的距离,

$$\text{因为 } \frac{|\overrightarrow{DA} \cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以直线}$$



AC_1 到平面 CDB_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



4-1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **【解析】**依题意, 平行平面 α, β

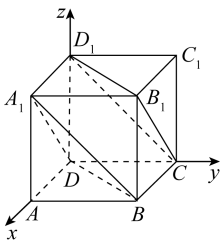
间的距离即为点 O 到平面 β 的距离,

而 $\vec{OA} = (2, 1, 1)$, 所以平行平面 α, β 间

的距离 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{OA}|}{|\vec{n}|} =$

$$\frac{|-1 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4-2. 【解】以 D 为原点建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(0, 0, 0), A_1(1, 0, 1), B(1, 1, 0),$

$D_1(0, 0, 1),$

$\vec{A_1B} = (0, 1, -1), \vec{A_1D} = (-1, 0, -1),$

$\vec{A_1D_1} = (-1, 0, 0).$

设平面 A_1BD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z),$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{A_1B} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{A_1D} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0, \\ -x - z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 得 $y = 1, x = -1, \therefore \vec{n} = (-1, 1, 1).$

\therefore 点 D_1 到平面 A_1BD 的距离 $d =$

$$\frac{|\vec{A_1D_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

易证平面 $A_1BD \parallel$ 平面 $B_1CD_1,$

\therefore 平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 的距离等于

点 D_1 到平面 A_1BD 的距离,

\therefore 平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 的距离

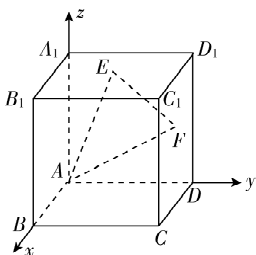


为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

巩固练

1. **D** 【解析】 $\because \vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2} \times (4, 3, 6) = (2, \frac{3}{2}, 3)$, $\vec{OC} = (0, 1, 0)$, $\therefore \vec{PC} = \vec{OC} - \vec{OP} = (-2, -\frac{1}{2}, -3)$, $\therefore |\vec{PC}| = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + 9} = \frac{\sqrt{53}}{2}$. 故选 D.

2. **A** 【解析】如图, 以 A 为坐标原点, AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0)$, $E(1, 1, 2)$, $F(1, 2, 1)$, $C(2, 2, 0)$, $\vec{AE} = (1, 1, 2)$, $\vec{AF} = (1, 2, 1)$.



设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \vec{AE} = x + y + 2z = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \vec{AF} = x + 2y + z = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y = -1, \text{ 则}$$

$x = 3, z = -1$, 可得平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (3, -1, -1)$.

又 $\vec{AC} = (2, 2, 0)$, 故点 C 到平面 AEF

的距离为 $\frac{|\boldsymbol{n} \cdot \vec{AC}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{6-2}{\sqrt{9+1+1}} =$

$\frac{4\sqrt{11}}{11}$. 故选 A.

3. **A** 【解析】由已知得 $\vec{AB} = (1, 1, 1)$, $\vec{CD} = (-2, 2, 1)$, $\vec{AC} = (1, 0, 0)$. 设向量 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$ 与向量 \vec{AB}, \vec{CD} 都垂直, 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \vec{AB} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \vec{CD} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x + y + z = 0, \\ -2x + 2y + z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $\boldsymbol{n} = (1, 3, -4)$.

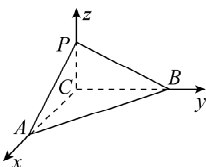
又平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , 则平面 α 与平面 β



间的距离为 $\frac{|\vec{AC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{|1 \times 1 + 3 \times 0 + (-4) \times 0|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{26}}{26}, \text{ 故选 A.}$$

4.3 【解析】以 C 为坐标原点, CA, CB, CP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $A(4, 0, 0), B(0, 3, 0), P\left(0, 0, \frac{9}{5}\right)$, 所以 $\vec{AB} = (-4, 3, 0), \vec{AP} = \left(-4, 0, \frac{9}{5}\right)$.

设在平面 PAB 内与直线 AB 垂直的向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则由 $\mathbf{n} \perp \vec{AB}$ 可得 $-4x + 3y = 0$.

由 \mathbf{n} 与 \vec{AB}, \vec{AP} 共面可知, 存在实数 m, p , 使得 $\mathbf{n} = m\vec{AB} + p\vec{AP}$,

所以 $(x, y, z) = m(-4, 3, 0) + p\left(-4, 0, \frac{9}{5}\right) = \left(-4m - 4p, 3m, \frac{9}{5}p\right)$,

$$\text{即} \begin{cases} x = -4m - 4p, \\ y = 3m, \\ z = \frac{9}{5}p, \end{cases} \quad \text{所以 } x = -\frac{4}{3}y - \frac{20}{9}z.$$

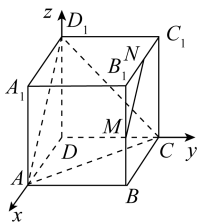
令 $x = 3$, 则 $y = 4, z = -\frac{15}{4}$,

即 $\mathbf{n} = \left(3, 4, -\frac{15}{4}\right)$, 故点 P 到斜边 AB

的距离为 $\frac{|\vec{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\left|-\frac{75}{4}\right|}{\frac{25}{4}} = 3$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】如图, 以 D 为坐标原点,

DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系.



则 $D(0,0,0), C(0,1,0), D_1(0,0,1),$

$M\left(1,1,\frac{1}{2}\right), A(1,0,0).$

$\therefore \overrightarrow{AM} = \left(0,1,\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AC} = (-1,1,0),$

$\overrightarrow{AD_1} = (-1,0,1).$

设平面 ACD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z),$

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -x + y = 0, \\ -x + z = 0, \end{cases}$$

令 $x=1$, 则 $y=z=1, \therefore$ 平面 ACD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (1,1,1).$

\therefore 点 M 到平面 ACD_1 的距离 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD_1}, MN \not\subset \text{平面 } ACD_1,$

$AD_1 \subset \text{平面 } ACD_1,$ 故 $MN \parallel \text{平面 } ACD_1,$

故直线 MN 到平面 ACD_1 的距离也

为 $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

6. B 【解析】以 D_1 为坐标原点, 建立如

图所示的空间直角坐标系, 则 $A_1(1,0,$

$0), C_1(0,1,0), D(0,0,1), A(1,0,1),$

所以 $\overrightarrow{DA_1} = (1,0,-1), \overrightarrow{DC_1} = (0,1,$

$-1), \overrightarrow{AD} = (-1,0,0).$

设平面 A_1C_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{m} =$

$$(x,y,1), \text{ 则有 } \begin{cases} \boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{DA_1}, \\ \boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{DC_1}, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{DA_1} = x-1=0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{DC_1} = y-1=0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$$

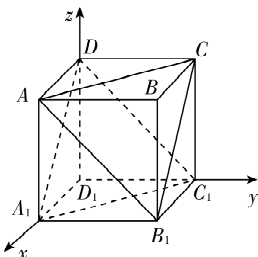
故 $\boldsymbol{m} = (1,1,1).$

由题意易得平面 $AB_1C \parallel \text{平面 } A_1C_1D,$

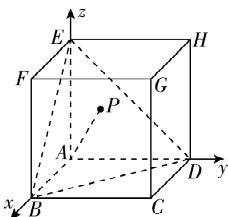
所以平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 之间的



距离为 $\frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



7. C 【解析】如图,以点 A 为坐标原点, AB, AD, AE 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 则 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), E(0, 0, 1)$.



则 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}(1, 0, 0) + 2\lambda(0, 1, 0) +$

$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{4}, 2\lambda, \frac{1}{2} - \lambda\right),$

则 $P\left(\frac{1}{4}, 2\lambda, \frac{1}{2} - \lambda\right), \overrightarrow{EP} = \left(\frac{1}{4}, 2\lambda, -\frac{1}{2} - \lambda\right), \overrightarrow{EB} = (1, 0, -1), \overrightarrow{DB} = (1, -1, 0).$

设平面 EBD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x,$

$$y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EB} = x - z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = x - y = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, 且 $EP \subset$ 平面 EBD ,

则 $\overrightarrow{EP} \perp \mathbf{n}$, 即 $\overrightarrow{EP} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{4} + 2\lambda +$

$\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) = 0$, 得 $\lambda = \frac{1}{4}$, 故 $P\left(\frac{1}{4},$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0),$

$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),$

$$\cos \angle PAB = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}|} =$$



$$\frac{\frac{1}{4}}{1 \times \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ 则 } \sin \angle PAB =$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}, \text{ 所以点 } P \text{ 到直线}$$

$$AB \text{ 的距离为 } |\overrightarrow{AP}| \cdot \sin \angle PAB =$$

$$\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} \times \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

8. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 【解析】设 $C(a, 0, 0), D(0, b, 0)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = (-1, b, -2), \overrightarrow{BC} = (a, -2, -1),$$

$$\overrightarrow{CD} = (-a, b, 0).$$

$$\text{因为 } AD \perp BC, \text{ 所以 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -a - 2b +$$

$$2 = 0, \text{ 即 } a + 2b = 2. |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ 其}$$

表示直线 $x + 2y - 2 = 0$ 上的点到原点的

距离, 故最小值为原点到该直线的距

$$\text{离, 即距离 } d = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

9. B 【解析】作出正四棱锥 $P-A'B'C'D'$,

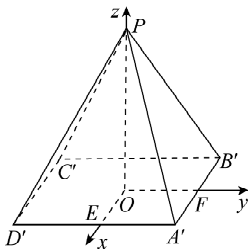
分别取 $A'D', A'B'$ 的中点 E, F , 连接

OE, OF , 易知 OP, OE, OF 两两垂直, 以

底面中心 O 为坐标原点, 分别以 $OE,$

OF, OP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建

立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图所示.



$$\text{则 } A'(1, 1, 0), B'(-1, 1, 0), P(0, 0,$$

$$2), \text{ 设平面 } PA'B' \text{ 的方程为 } Ax + By + Cz +$$

$$D = 0, \text{ 将以上 3 个坐标代入计算得 } A =$$

$$0, B = -D, C = -\frac{1}{2}D, \text{ 所以平面 } PA'B'$$

$$\text{的方程为 } -Dy - \frac{1}{2}Dz + D = 0, \text{ 即 } 2y + z -$$

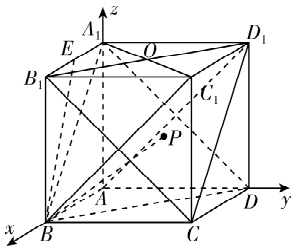
$$2 = 0, \text{ 所以底面中心 } O \text{ 到侧面的距离}$$

$$d = \frac{|2 \times 0 + 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

10. AB 【解析】如图, 建立空间直角坐



标系.



则 $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0),$

$A_1(0,0,1), C_1(1,1,1), D_1(0,1,1),$

$E\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, 所以 $\overrightarrow{BA} = (-1, 0, 0),$

$\overrightarrow{BE} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right).$

设 $\angle ABE = \theta$, 则 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BE}|} =$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故点 A 到直线 BE 的距离 $d_1 =$

$$|\overrightarrow{BA}| \sin \theta = 1 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{故 A 正确.}$$

易知 $\overrightarrow{C_1O} = \frac{1}{2} \overrightarrow{C_1A_1} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2},\right.$

0), 平面 ABC_1D_1 的一个法向量

$\overrightarrow{DA_1} = (0, -1, 1)$, 则点 O 到平面

$$ABC_1D_1 \text{ 的距离 } d_2 = \frac{|\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{C_1O}|}{|\overrightarrow{DA_1}|} =$$

$$\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{故 B 正确.}$$

$\overrightarrow{A_1B} = (1, 0, -1), \overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1),$

$\overrightarrow{A_1D_1} = (0, 1, 0).$

设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y,$

$$z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} x - z = 0, \\ y - z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 得 $y = 1, x = 1,$

所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 1).$

所以点 D_1 到平面 A_1BD 的距离 $d_3 =$

$$\frac{|\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

易知平面 $A_1BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 , 所以平

面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离即



为点 D_1 到平面 A_1BD 的距离,

所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的

距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 错误.

因为 $\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AA_1}$,

所以 $\vec{AP} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

又 $\vec{AB} = (1, 0, 0)$, 则 $\frac{\vec{AP} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{3}{4}$,

所以点 P 到直线 AB 的距离

$$d_4 = \sqrt{|\vec{AP}|^2 - \left| \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} \right|^2} =$$

$$\sqrt{\frac{181}{144} - \frac{9}{16}} = \frac{5}{6}, \text{ 故 D 错误. 故}$$

选 AB.